LIMITES A L'INFINI

I LIMITE D'UNE FONCTION POLYNOME OU RATIONNELLE EN $+\infty$ ou en $-\infty$

1 Fonctions polynômes en $+\infty$ et en $-\infty$.

Soit les fonctions polynômes suivantes : $f : x \longmapsto x^3 - x + 2$; $g : x \longmapsto -3x^4 + x^3 + x^2 + 3$ On cherche les limites de f et g en $-\infty$ et en $+\infty$. Les règles de calcul sur les limites ne permettent pas de conclure immédiatement.

Pour tout nombre x non nul, $f(x) = x^3(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3})$ et $g(x) = x^4 \times k(x)$. Conclure

EN $+\infty$ ET EN $-\infty$ UNE FONCTION POLYNOME A LA MEME LIMITE QUE SON TERME DE PLUS HAUT DEGRE

2 Fonctions rationnelles en $+\infty$ et en $-\infty$

Une fonction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynômes. La technique à utiliser pour la détermination des limites en $+\infty$ et en $-\infty$ découle donc de la méthode précédente.

Exemple 1 Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 + 4x^2 + x - 1}{x^3 + 2x - 3}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1° a) Factoriser $x^3 + 2x - 3$. Quel est l'ensemble D de définition de f ? f est-elle définie au voisinage de $\pm\infty$?
b) Pour x élément de $D - \{0\}$, mettre x^3 en facteur au numérateur et au dénominateur de f (x).
2° a) Peut-on en déduire les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de f ?
b) La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote parallèle à l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$? au voisinage de $-\infty$?

Exemple 2 Soit $g : x \longmapsto \dfrac{x^3 + 4x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ et Γ sa courbe représentative.

1° Donner l'ensemble de définition de g et les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe Γ admet-elle une asymptote parallèle à l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$? au voisinage de $-\infty$?

2° Vérifier que, pour tout x , $g(x) = x + 2 - \dfrac{6x + 5}{x^2 + 2x + 3}$. En déduire une équation d'une asymptote à (Γ) en $\pm\infty$

EN $+\infty$ ET EN $-\infty$, UNE FONCTION RATIONNELLE A LA MEME LIMITE QUE LE QUOTIENT DU TERME DE PLUS HAUT DEGRE DE SON NUMERATEUR PAR LE TERME DE PLUS HAUT DEGRE DE SON DENOMINATEUR

II TRANSFORMATION A L'AIDE DU TERME « PREDOMINANT » EN $+\infty$ OU EN $-\infty$

1 On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\boxed{f(x) = 4\sqrt{x} + 2 - x^2}$

a) Vérifier que les règles opératoires sur les limites ne permettent pas de conclure pour la limite en $+\infty$.
b) Mettre le terme « prédominant » x^2en facteur, avec x non nul, et en déduire la limite de f en $+\infty$.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{f(x) = \dfrac{-2x^2 + \sin x}{x^2 + 1}}$

a) Transformer l'écriture de f(x) en mettant x^2 en facteur au numérateur et au dénominateur.

b) Déterminer, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sin x}{x^2}$.

c) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

III RECHERCHE DE LIMITES AVEC DES RACINES

$\boxed{1}$ On se propose d'étudier la limite en + ∞ de chacune des fonctions suivantes, définies sur ℝ :

$\boxed{f : x \longmapsto \sqrt{9+4x^2}+x}$; $\boxed{g : x \longmapsto \sqrt{9+4x^2}-3x}$; $\boxed{h : x \longmapsto \sqrt{9+4x^2}-2x}$.

1° Vérifier que les règles de calcul sur les limites ne s'appliquent en +∞ que pour f déterminer la limite de f en +∞

2° Montrer que l'on peut écrire, pour tout x de] 0 ; + ∞ [$g(x) = x\left(\sqrt{\dfrac{9}{x^2}+4}-3\right)$

En déduire la limite de g en + ∞. Etudier la limite de g en –∞.

3° Vérifier que la méthode précédente ne s'applique pas pour h en + ∞. A l'aide d'une expression conjuguée, écrire h(x) sous la forme d'un quotient. En déduire la limite de h en + ∞. Etudier la limite de h en –∞.

4° Déterminer la limite en + ∞ de la fonction $k : x \longmapsto \sqrt{9+4x^2}-(2x+3)$ en utilisant la limite de h en + ∞.

$\boxed{2}$ 1° Fonction f définie sur $[-\dfrac{1}{2} ;+\infty[$ par $\boxed{f(x) = \sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}$

a) L'application directe des propriétés sur opérations et limites permet-elle de donner la limite de f en + ∞ ?

b) Pour tout x réel strictement positif écrire f(x) sous la forme $f(x) = x \times g(x)$. En déduire la limite de f en + ∞.

2° Fonction g définie sur [0; + ∞[par $\boxed{g(x) = \sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$. Pour déterminer la limite de la fonction g en + ∞, la méthode utilisée ci-dessus reste-t-elle valable ? Si non, pour quelles raisons ?

Transformer l'écriture de g(x) en utilisant le conjugué de $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$. Calculer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. La courbe (C) représentative de g a-t-elle une asymptote horizontale au voisinage de + ∞ ?

3° Fonction h définie sur]–∞ ;– 2[∪]0 ; +∞[par : $\boxed{h(x) = \sqrt{x^2+2x}-x}$

En utilisant les propriétés sur opérations et limites, donner la limite de h en – ∞. En utilisant la forme conjuguée, montrer que, pour tout x positif : $h(x) = \dfrac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}$. En déduire la limite de h en + ∞, et l'existence éventuelle d'une asymptote à la courbe représentative de h au voisinage de + ∞.

4° Fonction k définie sur ℝ par : $\boxed{k(x) = \sqrt{x^2+9}+x+3}$. Calculer la limite de k en ± ∞

IV RECHERCHES D'ASYMPTOTES

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = |x-2| + \dfrac{1}{|x|}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1° Déterminer la limite de la fonction f en 0.

En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale que l'on précisera.

2° a) Vérifier que, pour tout x, x ≥ 2, on peut écrire $f(x) = x-2+\dfrac{1}{x}$

Quelle est la limite de la fonction f en + ∞ ?

b) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote oblique ? Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-(x-2)]$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?

3° Donner l'écriture de f(x) sans le symbole $|\ |$ pour x < 0. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote en –∞.

4° En utilisant votre calculatrice, tracer la courbe $\mathscr{C}$ et placer ses asymptotes.