# CALCUL INTEGRAL

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

## I INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE.

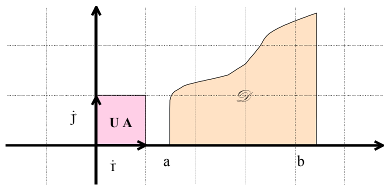
### 1° Aire et intégrale.

**Définition**

Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle [a , b], et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Le réel noté $\int_a^b f(x)\,dx$, appelé « intégrale de a à b de f », est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan $\mathscr{D}$

limitée par : $\begin{cases} \text{l'axe des abscisses} \\ \text{la courbe } \mathscr{C}_f \\ \text{et les droites d'équations } x = a \text{ et } x = b. \end{cases}$




$\mathscr{D} = \{ M(x , y) : a \le x \le b \text{ et } 0 \le y \le f(x) \}$

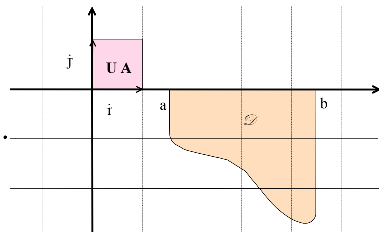
**Remarques**

a et b sont les bornes de l'intégrale.

x est une variable « muette » : elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre à l'exception de a et b .

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

### 2° Extension aux fonctions de signe quelconque




**Définition**

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a , b], et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

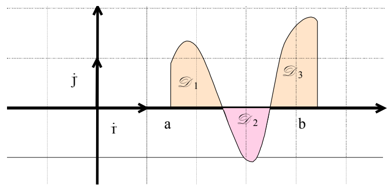
On définit l'intégrale de a à b de f de la manière suivante :

- si f est négative sur [a , b] alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\text{ aire }(\mathscr{D}_1) = -\int_a^b | f(t) |\,dt$$

- f a un signe variable sur [a , b] alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aire }(\mathscr{D}_1) - \text{aire }(\mathscr{D}_2) + \text{aire }(\mathscr{D}_3)$$




### 3° Valeur moyenne d'une fonction continue.

**Définition**

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

On appelle valeur moyenne de f sur [ a ; b] le réel : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

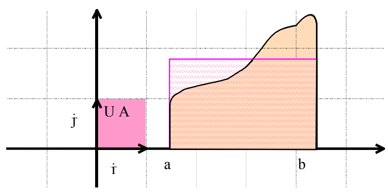
**Inégalité de la moyenne.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant les réels a et b, m et M deux réels.

- Si a ≤ b et si, pour tout x de [a , b], m ≤ f() ≤ M, alors $\boxed{m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)}$

- Si, pour tout x de I, | f(x) | ≤ M, alors $\boxed{\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le M\,(b-a).}$

**Interprétation graphique**




$\mu\,(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Si f est positive, µ est la hauteur du rectangle de largeur (b – a)

dont l'aire est égale à l'aire sous la courbe de f .Lorsque f est continue et positive sur [a , b] et si m < 0

l'aire du domaine sous la courbe de f est comprise entre l'aire du petit rectangle et l'aire du grand rectangle

## II INTEGRALE ET PRIMITIVE.

### 1° cas d'une fonction continue, positive et croissante sur [a b]

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représente une fonction f continue, positive et croissante sur un intervalle [a ; b] .

On considère la fonction $\mathcal{A}$ qui à tout réel $x_0$ de [a , b ] associe l'aire $\mathcal{A}(x_0)$ du domaine du plan limité par la courbe $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations "x = a" et "$x = x_0$".

La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur [a ,b] et pour tout réel x de [a , b] $\mathcal{A}'(x) = f(x)$.

On dit que $\mathcal{A}$ est une primitive de f sur [a , b]

De plus si $\mathcal{A}_0$ est, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan $\mathcal{D}$ du plan limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations "x = a" et "x = b".

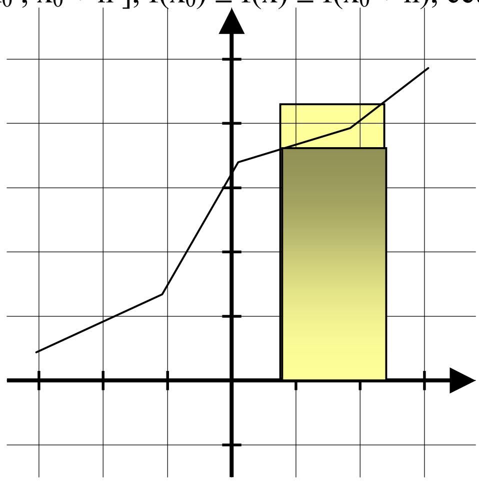
Alors : $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a)$.

**Démonstration** Etude de la dérivabilité de $\mathcal{A}$ en $x_0$.

- A droite de $x_0$.

Soit $x_o$ un réel de [a ; b [ et h un réel tel que $x_0 < x_0 + h \le b$.

L'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équations " $x = x_0$ ", "$x = x_0 + h$ ", la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est égale à $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$. et comme pour tout réel x de $[ x_0 , x_0 + h ]$, $f(x_0) \le f(x) \le f(x_0 + h)$, cette aire est comprise entre l'aire du "petit" rectangle de hauteur $f(x_0)$ et l'aire du grand rectangle $f(x_0 + h)$.



On a donc : $h \times f(x_0) \le A(x_0 + h) - A(x_0) \le h \times f(x_0 + h)$.

donc comme h > 0, $f(x_0) \le \dfrac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \le f(x_0 + h)$

$\lim\limits_{h \to 0^+} f(x_0 + h) = f(x_0)$ car f est continue en $x_0$

En utilisant le théorème des gendarme on peut dire que :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$$

$\mathcal{A}$ est dérivable à droite de $x_0$ et $\mathcal{A}_d'(x_0) = f(x_0)$

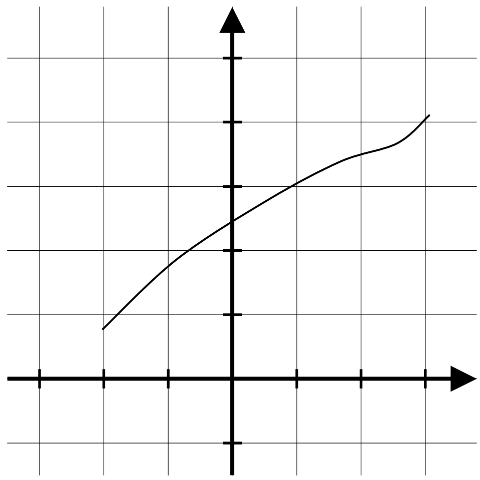
- A gauche de $x_0$.

Soit $x_o$ un réel de ]a ; b ] et h un réel tel que $a \le x_o + h < x_o$

L'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équations " $x = x_0$ ", "$x = x_0 + h$ ", la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est égale à $\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h)$.

et comme pour tout réel x de $[ x_0 + h , x_0 ]$, $f(x_0 + h) \le f(x) \le f(x_0)$, cette aire est comprise entre l'aire du "petit" rectangle de hauteur $f(x_0 + h)$ et l'aire du grand rectangle $f(x_0)$.

On a donc : $| h | \times f(x_0 + h) \le \mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h) \le | h | \times f(x_0)$.



donc comme h < 0, $f(x_0 + h) \le \dfrac{\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h)}{-h} \le f(x_0)$

donc $f(x_0 + h) \le \dfrac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \le f(x_0)$

$\lim\limits_{h \to 0^-} f(x_0 + h) = f(x_0)$ car f est continue en $x_0$

En utilisant le théorème des gendarme on peut dire que :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$$

$\mathcal{A}$ est dérivable à gauche de $x_0$ et $\mathcal{A}_g'(x_0) = f(x_0)$

Conclusion : $\mathcal{A}$ est dérivable en $x_0$ et $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$

### 2° Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive.

**Théorème**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitivequelconque de f sur I .

Pour tous réels a et b de I , on a : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

**Remarque :** on utilise souvent la notation, $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_b^a = F(b) - F(a)$

**Conséquences :** $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

## 3° Primitive s'annulant en a.

**Théorème**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un point de I .La fonction F définie sur I par :
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

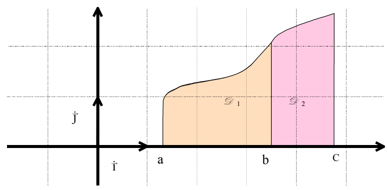
**Exemple** pour tout réel $x > 0$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

**Remarques**

- On ne peut pas employer la même lettre pour la borne variable x et la variable « muette » d'intégration t .
- La fonction F définie ci-dessus est donc dérivable sur I et $F' = f$ .

# III PROPRIETES DE L'INTEGRALE.

## 1° Relation de Chasles.

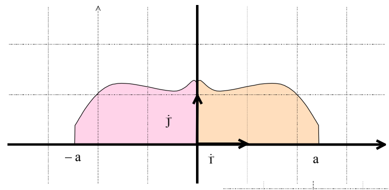


Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a , b et c de I :

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx}$$

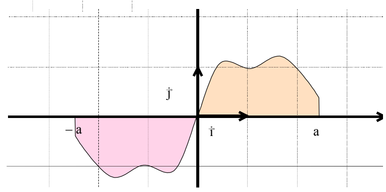
**Interprétation en termes d'aire** lorsque f est continue et positive sur I , avec $a \le b \le c$.
Aire($\mathscr{D}$ ) = Air($\mathscr{D}_1$) + Aire ($\mathscr{D}_2$)

**Applications**



f est une fonction continue sur un intervalle contenant a et – a .

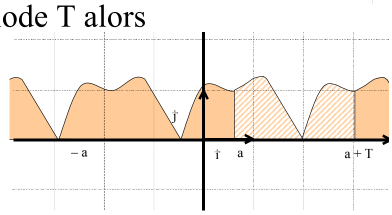
- Si f est paire sur[ – a , a ], alors $\boxed{\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx}$



- Si f est impaire sur[ – a , a ], alors $\boxed{\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0}$

- Si f est une fonction continue sur ℝ, périodique de période T alors

Pour tout réel a : $\boxed{\int_a^{a+T} f'x\,dx = \int_0^T f(x)\,dx}$



## 2° Linéarité de l'intégrale.

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b.
Pour tous réels α et β, on a

$$\boxed{\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx}$$

## 3° Signe de l'intégrale.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant les réels a et b tels que **a ≤ b.**

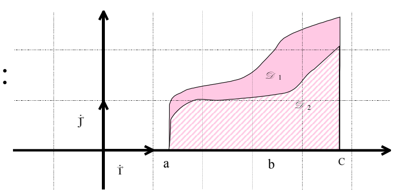
Si **f est positive** sur [a , b], alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

Si **f est négative** sur [a , b], alors $\int_a^b f(x)\,dx \le 0$.

## 4° Intégration d'inégalités.

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant les réels a et b tels que **a ≤ b.**

Si **pour tout réel x de [a , b], f(x) ≤ g(x),** alors $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx}$



Interprétation en termes d'aire lorsque f et g sont continues et positives sur [a , b] :
Aire ($\mathscr{D}_1$) ≤ Aire ($\mathscr{D}_2$)

## IV POINT SUR LES PRIMITIVES

### 1° Primitive de f sur I

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F sur I, c'est-à-dire tel que, pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$ .

**2° Théorème d'existence** Si une fonction est continue sur un intervalle I, alors elle admet des primitives sur I .

**3° Primitives d'une même fonction** Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Si f admet une primitive F sur I , alors
• les fonctions de la forme $x \longmapsto F(x) + C$ ( $C \in \mathbb{R}$) sont des primitives de f sur I ;
• si G est une primitive de f sur I , il existe un réel C tel que, pour tout x de I : $G(x) = F(x) + C$.

**Démonstration**

• Soit k un réel quelconque et H la fonction définie sur I par $H(x) = F(x) + C$ .
H est dérivable sur I et, pour tout x de I , $H'(x) = F'(x) = f(x)$ : la fonction H est donc une primitive de f sur I.
• Soit G une primitive de f sur I ; alors, pour tout x de I , $G'(x) = f(x)$ . On a aussi : pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$ d'où $G'(x) = F'(x)$ donc $(G - F)'(x) = 0$ .
On en déduit que la fonction $G - F$ est une fonction constante sur I , c'est-à-dire qu'il existe un réel C tel que pour tout x de I , $G(x) = F(x) + C$ .

### 4° Primitive vérifiant une condition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant des primitives sur I. Un réel $x_0$ de I étant choisi et un réel $y_0$ étant donné, il existe une seule primitive de f sur I prenant la valeur $y_0$ en $x_0$ .

**Démonstration**

Soit F une primitive de f sur I , les primitives sont définies sur I par $G(x) = F(x) + C$, avec C réel.
$G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + C = y_0 \Leftrightarrow C = y_0 - F(x_0)$
Soit G la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$. G est une primitive de f qui prend la valeur $y_0$ en $x_0$.
Soit H une autre primitive de f sur I prenant la valeur $y_0$ en $x_0$ .

$H = G + C'$ et comme $H(x_0) = y_0 = G(x_0)$ on a $C' = 0$ et on peut dire que $H = G$.

### 6° Primitives des fonctions usuelles

| fonction | une primitive | validité |
|---|---|---|
| $f(x) = a$ , $a \in \mathbb{R}$ | $F(x) = a\,x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^\alpha$ , $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$ | $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x)= \frac{1}{x^2}$ | $F(x) = -\frac{1}{x}$ | $]0 ; +\infty[$ ou $]-\infty ; 0[$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}$ | $F(x) = \frac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}}$ | $]0 ; +\infty[$ ou $]-\infty ; 0[$ |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x) = 2\sqrt{x}$ | $]0 ; +\infty[$ |
| $f(x) = \cos x$ | $F(x) = \sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \sin x$ | $F(x) = -\cos x$ | $\mathbb{R}$ |

### 7° Linéarité.

f et g sont deux fonctions définies sur un même intervalle I et admettant des primitives sur I.
Si F est une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I , alors, pour tous réels $\alpha$ et $\beta$: la fonction $\alpha F + \beta G$ est une primitive sur I de la fonction a $\alpha f + \beta g$ .

**8° Primitive d'une fonction composée.**

u étant une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J, avec pour tout x de I , u(x) dans J .

Si g admet une primitive G sur J , alors une primitive sur I de la fonction f : $x \longmapsto u'(x) \times g(u(x))$ est la fonction F: $x \longmapsto G(u(x))$ .

| fonction | une primitive |
|---|---|
| $f = u' \bullet u^n$ | $F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ |
| u ne s'annulant pas sur I : $f = \dfrac{u'}{u^n}$ | $F = -\dfrac{1}{(n-1)} \bullet u^{n-1}$ |
| u étant strictement positive sur I : $f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | $F = 2\sqrt{u}$ |
| $f= u' \bullet \cos(u)$ | $F = \sin(u)$ |
| $f = u' \bullet \sin(u)$ | $F = -\cos(u)$ |

## V TECHNIQUES DE CALCUL D'INTEGRALES

**1° Utilisation de primitives**

| fonction | $u'\,e^u$ | $u'\,u^\alpha$ | $\dfrac{u'}{u}$ |
|---|---|---|---|
| Une primitive | $e^u$ | $\dfrac{u^{\alpha+1}}{1+\alpha}$ | $\ln\lvert u\rvert$ |

Exemple : $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{1}{x-1}\,dx = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

**2° Utilisation de la parité ou de la périodicité**

**Périodicité**

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ périodique de période T

$\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx$ est indépendante de a

**Parité**

Soit f continue sur un intervalle I centré en 0

Pour tout réel a de I, si f est paire, $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \times \int_0^a f(x)dx}$

Si f est impaire, $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0}$

**4° Intégration par partie**

Soit u et v deux fonctions dérivable sur un intervalle I et dont les dérivées sont continues sur I. a et b sont deux réels de I alors :

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = [\, u(x)\, v(x)\, ]_b^a - \int_a^b u'(x)v(x)dx}$$

Démonstration

On sait que : $(u \times v)' = u'\,v + u\,v'$ donc $u\,v' = (u\,v)' - u'\,v$.

on a donc $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \int_a^b ((u(x)\,v(x))' - u'(x)\,v(x))\,dx = \int_a^b (u(x)\,v(x))'\,dx - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$

$= [\, u(x)\, v(x)\, ]_b^a - \displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)dx$