$\boxed{1}$ De combien de façons peut-on choisir, dans un jeu de 32 cartes,5 cartes contenant :

a) exactement 1 roi ?
b) au moins 1 roi ?
c) exactement 1 roi et 2 dames ?
d) exactement 1 roi, 1 dame et 2 valets ?
e) l'as de pique et au moins 2 trèfles ?
f) exactement 2 carreaux, l trèfle, l cœur ?

$\boxed{2}$ Une classe comprend 9 garçons et 11 filles. On veut trois garçons pour les rôles de Tartuffe. Orgon et Cléante et deux filles pour les rôles d'Elvire et Marianne. On appelle un tel choix une troupe.
a) Combien y a-t-il de troupes possibles ?
b) André refuse de jouer Orgon. Combien y a t-il de troupes possibles ?

$\boxed{3}$ A l'aide de l'alphabet français, combien peut-on écrire de mots de 3 lettres contenant 1 voyelle ? 2 voyelles ?

$\boxed{4}$ Un QCM est constitué de 8 questions. Pour chacune d'elles,4 réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard.
1° Quel est le nombre de réponses possibles ?
2° Quel est le nombre de cas où les réponses aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses ?
3° Quel est le nombre de cas où les réponses à exactement 6 questions sont exactes ?
4° Quel est le nombre de cas où les réponses à au moins 6 questions sont exactes ?

$\boxed{5}$ On considère les mains de 5 cartes qu'on peut constituer avec un jeu de 32 cartes (on rappelle qu'un tel jeu est constitué de 8 cartes de valeurs différentes (As, roi, dame, valet, 10, 9,8, 7) dans 4 couleurs différentes (cœur, carreau, pique, trèfle). Déterminer le nombres de mains de 5 cartes qui contiennent
a) Un carré d'As, c'est à dire les 4 As.
b)Un carré, c'est à dire 4 cartes de même valeur.
c)Un full, c'est à dire 3 cartes de même valeur et 2 autres cartes de même valeur.
d)Un brelan , c'est à dire 3 cartes de même valeur , sans full ni carré.
e)Deux paires , c'est à dire deux fois 2 cartes de même valeur , sans full ni carré.
f)Une quinte flush , c'est à dire 5 cartes de valeurs consécutives et de même couleur.
g)Une quinte, c'est à dire 5 cartes de valeurs consécutives, sans quinte flush .

$\boxed{6}$ Certaines situations de dénombrement nécessitent l'utilisation conjointe du principe multiplicatif et des combinaisons.
Un « mot de n lettres » est une suite ordonnée de n lettres, non nécessairement distinctes, ce mot ayant un sens ou non.
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des mots de huit lettres constitués à l'aide des dix premières lettres de l'alphabet, c'est-à dire des lettres de A à J .
l° Déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble
2° Combien de mots de cet ensemble comportent,
a) exactement deux fois la lettre A ?
b) au moins deux fois la lettre A ?
c) exactement deux fois la lettre A , les autres lettres étant distinctes ?
3° Dans cette question, on s'intéresse aux mots de huit lettres de $\mathscr{E}$ constitués uniquement à l'aide de trois lettres intervenant respectivement quatre fois, trois fois et une fois.
Par exemple, le mot CEEJCCEC est obtenu en choisissant trois lettres parmi les dix premières lettres de l'alphabet, puis les places de ces lettres, répétées ou non.
a) Montrer que le nombre de tels mots est égal à $\frac{10\,!}{7\,!}\times\binom{8}{4}\times\binom{4}{3}\times\binom{1}{1}$ et calculer ce produit.
b) Justifier sans calcul que le résultat s'obtient également par les formules :
$\frac{10\,!}{7\,!}\times\binom{8}{3}\times\binom{5}{4}\times\binom{1}{1}$ ou $\frac{10\,!}{7\,!}\times\binom{8}{1}\times\binom{7}{3}\times\binom{4}{4}$
c) Justifier que le nombre de permutations distinctes du mot AAABCDEF est $\frac{8\,!}{3\,!}$.
En déduire le nombre de permutations distinctes du mot CEEJCCEC .
Déterminer alors une autre formule donnant le résultat obtenu en 3° a) et en b).
4° Dénombrer les mots de $\mathscr{E}$ constitués uniquement à l'aide de trois lettres, deux d'entre elles intervenant trois fois, et, par conséquent $1^{\text{ière}}$ lettre intervenant deux fois (par exemple, IBBIGGBIG).

$\boxed{1}$ **De combien de façons peut-on choisir, dans un jeu de 32 cartes,5 cartes contenant : a) exactement 1 roi ?**

$\binom{4}{1}$ choix possibles pour le roi et $\binom{28}{4}$ choix possibles pour les quatre cartes distinctes d'un roi.

$\binom{4}{1}\times\binom{28}{4}$ mains contiennent exactement 1 roi

b) au moins 1 roi ?

$\binom{28}{5}$ mains sans roi et $\binom{32}{5}$ mains possibles donc $\binom{32}{5}-\binom{28}{5}$ mains contiennent au moins un roi.

variante $\binom{4}{1}\times\binom{28}{4}+\binom{4}{2}\times\binom{28}{3}+\binom{4}{3}\times\binom{28}{2}+\binom{4}{4}\times\binom{28}{1}$

c) exactement 1 roi et 2 dames ?

$\binom{4}{1}$ choix possibles pour le roi, $\binom{4}{2}$ choix possibles pour les dames et $\binom{24}{2}$ choix possibles pour les autres cartes (ni dame ni roi)

d) exactement 1 roi, 1 dame et 2 valets ? $\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{2}\times\binom{20}{1}$

e) l'as de pique et au moins 2 trèfles ? $\binom{1}{1}\times\binom{4}{2}\times\binom{23}{2}$

f) exactement 2 carreaux, l trèfle, l cœur ? $\binom{8}{2}\times\binom{8}{1}\times\binom{8}{1}$

$\boxed{2}$ **Une classe comprend 9 garçons et 11 filles. On veut trois garçons pour les rôles de Tartuffe. Orgon et Cléante et deux filles pour les rôles d'Elvire et Marianne. On appelle un tel choix une troupe.**

a) Combien y a-t-il de troupes possibles ?

9 choix possibles pour Tartuffe
8 choix possibles pour Orgon
7 choix possibles pour Cléante
11 choix possibles pour Elvire
10 choix possibles pour Marianne. $9\times8\times7\times11\times10$

b) André refuse de jouer Orgon. Combien y a t-il de troupes possibles ?

Si André joue Orgon il n'y a plus que 4 rôles à distribuer parmi les 8 garçons et les 11 filles qui restent. :
Donc il y a $8\times7\times11\times10$ distributions avec André qui joue Orgon.
Donc il y a $9\times8\times7\times11\times10-8\times7\times11\times10$ troupes possibles.

$\boxed{3}$ **A l'aide de l'alphabet français, combien peut-on écrire de mots de 3 lettres contenant 1 voyelle ? 2 voyelles ?**

3 choix possibles pour la position de la voyelle
6 choix possibles pour la voyelle
30 choix possibles pour la consonne en première position
30 choix possibles pour la consonne en seconde position
$3\times6\times30\times30=$ **16 200**
3 choix possibles pour la position de la consonne
30 choix possibles pour la consonne
6 choix possibles pour la voyelle en première position
6 choix possibles pour la voyelle en seconde position
$3\times30\times6\times6=$ **3 240**

$\boxed{4}$ Un QCM est constitué de 8 questions. Pour chacune d'elles,4 réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard. 1° Quel est le nombre de réponses possibles ?

Les questions sont différentes les unes les autres. On peut les numéroter et tenir compte de l'ordre des réponses possibles. Il y a répétition possible d'une question à l'autre.

A priori on va utiliser les puissances

Pour caque question il y a 4 réponses possibles, on a donc $4^8 = $ **65 536** réponses possibles.

2° Quel est le nombre de cas où les réponses aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses ?

Pour chaque question il y a 3 réponses fausses possibles et 1 seule exacte.

1^6 choix possibles pour les 6 premières réponses et 3^2 pour les deux dernières.

Il y a donc $1^6 \times 3^2 = $ **9** cas où les réponses au 6 premières questions sont justes et aux deux autres fausses.

3° Quel est le nombre de cas où les réponses à exactement 6 questions sont exactes ? $\binom{8}{2} \times 3 \times 3 = $ **252**

$\binom{8}{2}$ choix possibles pour les 2 questions fausses parmi les 8 questions posées.

3 choix possibles pour la première réponse fausse

3 choix possibles pour la seconde réponse fausse

4° Quel est le nombre de cas où les réponses à au moins 6 questions sont exactes ? $252 + 8 \times 3 + 1 = $ **277**

6 réponses justes : 252

7 questions justes : 8 choix pour la question fausse et 3 choix de réponses fausse à cette question. 8×3

8 réponses justes : 1

$\boxed{5}$ On considère les mains de 5 cartes qu'on peut constituer avec un jeu de 32 cartes (on rappelle qu'un tel jeu est constitué de 8 cartes de valeurs différentes (As, roi, dame, valet, 10, 9,8, 7) dans 4 couleurs différentes (cœur, carreau, pique, trèfle).
Déterminer le nombres de mains de 5 cartes qui contiennent

a) Un carré d'As, c'est à dire les 4 As. **28**

Il y a 28 choix possibles pour la cinquième carte donc il y a **28** mains qui contiennent un carré d'as.

b)Un carré, c'est à dire 4 cartes de même valeur. **224**

8 choix possibles pour la valeur du carré **et** 28 choix possibles pour la dernière carte.

Il y a donc $8 \times 28 = $ **224** mains qui contiennent un carré.

c)Un full, c'est à dire 3 cartes de même valeur et 2 autres cartes de même valeur. $8 \times 7 \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = $ **1 344**

8 choix possibles pour la valeur répétée 3 fois, 7 choix pour la valeur répétée 2 fois, $\binom{4}{3}$ choix possibles pour les couleurs des 3 cartes de même valeur et $\binom{4}{2}$ choix pour les couleurs des 3 cartes de même valeur.

d)Un brelan , c'est à dire 3 cartes de même valeur , sans full ni carré. $8 \times \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} - 8 \times 7 \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = $ **10 752**

B : " avoir un brelan" F : "avoir un full" et C : 'avoir un carré.

Pour avoir un brelan ou un full mais pas un carré (c'est à dire avoir exactement 3 cartes de même valeur) il y a :

8 choix possibles pour la valeur répétée 3 fois, (par exemple "trois dames") $\binom{4}{3}$ choix possibles pour les couleurs des 3 cartes de même valeur (par exemple "dame de pique, dame de cœur et dame de carreau") et $\binom{28}{2}$ choix possibles pour les deux autres cartes d'une autre valeur que celle des 3 cartes répétées, ces 2 cartes pouvant avoir, elles deux, la même valeur. (par exemple "as de coeur et roi de pique" ou "as de cœur et as de pique")

Donc card $(B \cup F) = 8 \times \binom{4}{3} \times \binom{28}{2}$ et il y a $8 \times 7 \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{2}$ fulls

On sait que card $(B \cup F) = $ card $B + $ card $F - $ card $(B \cap F) = $ card $B + $ card F car $B \cap F = \varnothing$

On a donc card $B = $ card $(B \cup F) - $ card $F = 8 \times \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} - 8 \times 7 \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = $ **10 752**

Variante On suppose que l'on tire les deux dernières cartes l'une après l'autre

8 choix possibles pour la valeur répétée 3 fois, ("par exemple trois dames") $\binom{4}{3}$ choix possibles pour les couleurs des 3 cartes de même valeur, (par exemple "dame de pique, dame de cœur et dame de carreau") 28 choix possibles pour la quatrième carte qui ne doit être une dame ("par exemple le valet de pique") et 24 choix possibles pour la quatrième carte qui ne doit pas être une dame et ne doit pas être un valet. (par exemple "as de cœur").
Chaque main obtenue de la sorte est comptée deux fois.
Par exemple les deux événements suivants "On tire d'abord la dame de pique, la dame de cœur et la dame de carreau, puis on tire le valet de pique, puis l'as de cœur " et "On tire d'abord la dame de pique, la dame de cœur et la dame de carreau, puis on tire l'as de cœur, puis le valet de pique" donnent la même main : dame de pique, dame de cœur, dame de carreau, 'as de cœur et valet de pique donc il y a $\frac{1}{2}\times 8\times\binom{4}{3}\times 28\times 24 = \mathbf{10\ 572}$ brelans.

e) Deux paires , c'est à dire deux fois 2 cartes de même valeur , sans full ni carré. $\binom{8}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{24}{1} = \mathbf{24\ 192}$

$\binom{8}{2}$ choix possibles pour les deux valeurs (distinctes), $\binom{4}{2}$ choix pour les couleurs des deux cartes de la plus haute valeur $\binom{4}{2}$ choix pour les deux autres cartes et $\binom{24}{1}$ pour la dernière carte qui n'a pas la même valeur que les 4 autres cartes déjà choisies.

f)Une quinte flush , c'est à dire 5 cartes de valeurs consécutives et de même couleur. $4\times 4 = \mathbf{16}$

4 choix possibles pour la couleur et 4 valeurs possibles pour la plus petite valeur : 7, 8, 9 et 10

g)Une quinte, c'est à dire 5 cartes de valeurs consécutives, sans quinte flush . $4\times 4\times 4^4 - 4\times 4 = \mathbf{4\ 080}$

4 choix pour la plus petite valeur, 4 choix pour sa couleur, la valeur des 4 suivantes est déterminée et il reste 4^4 pour leur couleur. on trouve tous les choix de quintes possibles. Il faut retirer les 16 quintes flush

$\boxed{6}$ Certaines situations de dénombrement nécessitent l'utilisation conjointe du principe multiplicatif et des combinaisons.

Un « mot de *n* lettres » est une suite ordonnée de *n* lettres, non nécessairement distinctes, ce mot ayant un sens ou non.
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des mots de huit lettres constitués à l'aide des dix premières lettres de l'alphabet, c'est-à dire des lettres de A à J . l° Déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble 10^8

2° Combien de mots de cet ensemble comportent a) exactement deux fois la lettre A ?

$\binom{8}{2}$ positions possibles pour la lettre A et 9^6 pour le choix des huit autres lettres différentes de A.

$\binom{8}{2}\times 9^6$ mots comporte exactement 2 lettres A.

b) au moins deux fois la lettre A ?

9^8 mots n'ont pas la lettre A et 8×9^7 mots ont exactement une fois la lettre A
$10^8 - 8\times 9^7 - 9^8$ mots ont au moins deux fois la lettre A.

c) exactement deux fois la lettre A , les autres lettres étant distinctes ?

$\binom{8}{2}$ positions possibles pour la lettre A

$9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2$ pour le choix des huit autres lettres différentes de A distinctes..

$\binom{8}{2}\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2$ mots ont exactement 2 lettres A, les autres lettres étant distinctes

3° Dans cette question, on s'intéresse aux mots de huit lettres de $\mathscr{E}$ constitués uniquement à l'aide de trois lettres intervenant respectivement quatre fois, trois fois et une fois. Par exemple, le mot CEEJCCEC est obtenu en choisissant trois lettres parmi les dix premières lettres de l'alphabet, puis les places de ces lettres, répétées ou non.

a) Montrer que le nombre de tels mots est égal à $\frac{10\,!}{7\,!}\times\binom{8}{4}\times\binom{4}{3}\times\binom{1}{1}$ et calculer ce produit.

Choix des lettres : 10 choix possibles pour la première lettre, répétée 4 fois, 9 choix pour la seconde, répétée 3 fois et 8 fois pour la dernière répétée une fois. $\frac{10\,!}{7\,!}$

Choix de la position des lettres : $\binom{8}{4}$ choix possibles pour la place de la première lettre répétée 4 fois, $\binom{4}{3}$ choix pour la place de la seconde lettre répétée 3 fois et $\binom{1}{1}$ choix pour la place de la dernière lettre.

$\frac{10\,!}{7\,!}\times\binom{8}{4}\times\binom{4}{3}\times\binom{1}{1}=\frac{10\,!}{7\,!}\times\frac{8\,!}{4\,!\times 4\,!}\times\frac{4\,!}{3\,!}\times 1=\frac{10\,!\times 8}{7\,!\times 4\,!\times 3\,!}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 8}{3\times 2}=211600$

b) Justifier sans calcul que le résultat s'obtient également par les formules : $\frac{10\,!}{7\,!}\times\binom{8}{3}\times\binom{5}{4}\times\binom{1}{1}$ ou $\frac{10\,!}{7\,!}\times\binom{8}{1}\times\binom{7}{3}\times\binom{4}{4}$

Choix des lettres : 10 choix possibles pour la première lettre, répétée 3 fois, 9 choix pour la seconde, répétée 4 fois et 8 choix pour la dernière répétée une fois. $\frac{10\,!}{7\,!}$

$\binom{8}{3}$ choix possibles pour la place de la première lettre répétée 3 fois, $\binom{5}{4}$ choix pour la place de la seconde répétée 4 fois, $\binom{1}{1}$ choix pour la place de la dernière lettre

Donc $\frac{10\,!}{7\,!}\times\binom{8}{3}\times\binom{5}{4}\times\binom{1}{1}$

Choix des lettres : 10 choix possibles pour la première lettre, répétée une fois, 9 choix pour la seconde, répétée 3 fois et 8 choix pour la dernière répétée 4 fois. $\frac{10\,!}{7\,!}$

$\binom{8}{1}$ choix possibles pour la place de la première lettre répétée une fois, $\binom{7}{3}$ choix pour la place de la seconde lettre répétée 3 fois et $\binom{4}{4}$ choix pour la place de la dernière lettre répétée 4 fois

Donc $\frac{10\,!}{7\,!}\times\binom{8}{1}\times\binom{7}{3}\times\binom{4}{4}$

c) Justifier que le nombre de permutations distinctes du mot AAABCDEF est $\frac{8\,!}{3\,!}$.

$\binom{8}{3}$ choix possibles de la position des A et 5 ! permutations possibles des lettres qui restent.

$\frac{8\,!}{3\,!\,5\,!}\times 5\,!=\frac{8\,!}{3\,!}$

En déduire le nombre de permutations distinctes du mot CEEJCCEC .
Déterminer alors une autre formule donnant le résultat obtenu en 3° a) et en b).

$\binom{8}{3}\times\binom{5}{4}\times\binom{1}{1}=\frac{8\,!}{3\,!\times 5\,!}\times\frac{5\,!}{4\,!}\times 1=\frac{8\,!}{3\,!\,4\,!}$

3° a) $10\times 9\times 8$ choix de lettres et $\frac{8\,!}{3\,!\,4\,!}$ permutation donc $10\times 9\times 8\times\frac{8\,!}{3\,!\,4\,!}=$ 201600

4° Dénombrer les mots de E constitués uniquement à l'aide de trois lettres, deux d'entre elles intervenant trois fois, et, par conséquent 1ière lettre intervenant deux fois (par exemple, BBIGGBIG).

10 choix possibles pour la première lettre répétée 2 fois.

$\binom{9}{2}$ choix possibles pour les deux autres répétées 3 fois.

$\binom{8}{2}$ positions possibles pour la première lettre répétée deux fois.

On classe les deux autres par ordre alphabétique.

$\binom{6}{3}$ positions possibles pour la première lettre répétée trois fois et $\binom{3}{3}$ position pour la seconde.

Il y a donc $\binom{8}{2}\times\binom{6}{3}=\frac{8\,!}{2\,!\,6\,!}\times\frac{6\,!}{3\,!\,3\,!}=\frac{8\,!}{3\,!\,3\,!\,2\,!}$ permutations

Donc le nombre cherché est égal à : $10\times\binom{9}{2}\times\frac{8\,!}{3\,!\,3\,!\,2\,!}=\frac{10\times 9\times 8\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4}{2\times 3\times 2\times 2}$

$=10\times 9\times 8^2\times 7\times 5$