

I VARIABLES ALEATOIRES

1° Définition :

Une **variable aléatoire** X est une application définie sur un ensemble E muni d'une probabilité P , à valeurs dans $\mathbb{R}$.

X prend les valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ définies par :

$$p_i = p(X = a_i).$$

L'affectation des p_i aux a_i permet de définir une nouvelle loi de probabilité sur un nouvel univers.

$E' = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Cette loi, notée P' ou P_X , est appelée **loi de X** .

2° Paramètres d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$.

On appelle respectivement **espérance mathématique** de X , **variance** de X et **écart-type** de X , l'espérance, la variance et l'écart - type de la loi de probabilité P_X de X .

Notation : $E(X)$, $\text{Var}(X)$ et $\sigma(X)$

3° Définition fonction de répartition de X

X étant une variable aléatoire, on pose pour tout réel t $F(t) = P(X \leq t)$.

La fonction F ainsi définie s'appelle la fonction de répartition de X .

Dans le cas de probabilité discrète F est une fonction en escalier.

4° Indépendance de deux variables aléatoires

Définition :

Dire que deux variables X et Y sont **indépendantes** signifie que, **quels que soient i et j** , les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.

Propriétés :

Si X et Y sont deux variables aléatoires sur un même univers E

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

$$E(X + a) = E(X) + a$$

Si en plus X et Y sont indépendantes alors.

$$E(X \times Y) = E(X) \times E(Y) \text{ et } V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

II LOI BINOMIALE

1° Epreuve de Bernoulli.

a) Epreuve de Bernoulli. Lorsque dans une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement S , on dit que cette expérience est une épreuve de Bernoulli.

b) Variable de Bernoulli

On définit la variable aléatoire de Bernoulli X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

La loi de probabilité de x est appelé loi de Bernoulli de paramètre p

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

$X = x_i$	1	0
$p(X = x_i)$	p	$1-p$

2° Loi binomiale : cas général

a) expérience de Bernoulli,

Lorsqu'on répète n fois une épreuve de Bernoulli, toujours dans les mêmes conditions et de façon que le résultat S ou $\bar{S}$ de l'une quelconque de ces épreuves ne dépende pas des épreuves précédentes, on dit que l'on effectue une expérience ou schéma de Bernoulli.

c) Loi binomiale

Par définition la variable aléatoire X qui à chaque issue associe le nombre de succès S obtenus lors d'une expérience de Bernoulli. suit une loi binomiale de paramètres n et p

X prend donc les valeurs $\{0, 1, \dots, n\}$. X est la somme des n variable aléatoire de bernoulli définies pour chaque épreuve. On note $q = 1 - p$.

Pour tout entier k , $0 \leq k \leq n$, la probabilité de l'événement $(X = k)$ est : $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

k	0	1	2	.	k	...	n
$p(X = k)$	$\binom{n}{0} p^0 q^n$	$\binom{n}{1} p^1 q^{n-1}$	$\binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$	.	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	.	$\binom{n}{n} p^n q^{n-n}$
	q^n	$n p q^{n-1}$	$\frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2}$	.	$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k q^{n-k}$	.	p^n

Espérance mathématiques, Variance, Ecart-type

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p).$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$