1 On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3 contenant chacune 2 boules indiscernables.

Dans U_1 une boule est marquée G, l'autre est marquée A.
Dans U_2 une boule est marquée 3, l'autre est marquée 5.
Dans U_3 une boule est marquée $\frac{1}{2}$ l'autre est marquée 2.

Une épreuve E consiste à tirer au hasard une boule dans chaque urne. On définit une suite (U_n) de la façon suivante : si la boule tirée dans U_1 est marquée A, la suite est arithmétique, si elle est marquée G, la suite est géométrique ; la boule tirée dans U_2 désigne le premier terme u_0 et la boule tirée dans U_3 désigne la raison.
1° Calculer la probabilité d'avoir :
a) une suite u arithmétique ; b) une suite u convergente ; c) une suite u telle que u_4 soit un nombre entier pair.
2° Calculer la probabilité d'avoir une suite u qui ne soit pas convergente sachant qu'elle est géométrique.
3° Un joueur tire une boule dans chaque urne et définit ainsi une suite numérique u :

- si u est géométrique, il gagne 5 F ;
- si u est arithmétique et $u_4 < 7$, il perd 4 F ;
- si u est arithmétique et $u_4 > 7$, il perd 6 F.

Soit X la variable aléatoire égale au gain (algébrique) du joueur :
Donner la « loi de probabilité » de X et calculer l'espérance de X.

2 Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette.

Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$.

Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.

On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout entier n strictement positif, on considère les événements suivants :
A_n : « Alice atteint la cible au $n^{\text{ième}}$ coup » ;
B_n : « Alice rate la cible au $n^{\text{ième}}$ coup ». On pose $p_n = p(A_n)$.
Pour les questions 1. et 2., on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1° Déterminer p_1 et montrer que $P_2 = \frac{4}{15}$. 2° Montrer que, pour tout entier naturel $n > 2$, $P_n = \frac{2}{15} P_{n-1} + \frac{1}{5}$.

3° Pour $n > 1$, on pose $u_n = P_n - \frac{3}{13}$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q.
b) Ecrire u_n puis p_n en fonction de n. c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$

3 On considère 7 boules numérotées de 1 à 7. L'expérience consiste à en tirer simultanément 3.

1° Soit k un entier vérifiant $3 \le k \le 7$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?

2° En déduire une expression de $k=\sum_{3}^{7} \binom{k-1}{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.

4 **Partie A** Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons.

On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.
On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.
1° Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?
2° Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
3° Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ?
4° Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

Partie B On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons. ($n \le 100$.)

1° Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
2° Déterminer les entiers n tels que p_n soit supérieur ou égal à 0,95.
3° On note X la variable aléatoire associée au nombre de sujets que l'élève a étudiés après tirage. déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

$\boxed{5}$ Dépistage d'une maladie

On Etudie dans ce problème un cas concret afin de minimiser le coût du dépistage d'une maladie.
(La méthode décrite a systématiquement été utilisée par l'armée américaine durant la $2^{\text{ième}}$ Guerre mondiale.)
Le but de cet exercice est de comparer l'efficacité, par rapport au coût, de deux méthodes de dépistage d'une maladie concernant statistiquement 1 % de la population, sur un ensemble de 1000 personnes.
On considère que les résultats des tests individuels constituent des événements indépendants.
Dans la méthode A, on effectue 1000 analyses individuelles (méthode exhaustive).
Dans la méthode B, on répartit les 1 000 personnes en n groupes de r personnes (donc $n \times r = 1000$) .
Dans chaque groupe, on mélange les r prélèvements pour en faire une seule analyse, ce qui conduit à une première série de n analyses.
Un groupe est négatif lorsqu'aucun des individus qui le composent n'est malade.
Sinon, le groupe est positif et l'on procède alors à une nouvelle analyse de sang de chacune des r personnes de ce groupe.

1° Etude de la méthode B

a) Quelle est la probabilité pour qu'un groupe donné soit négatif ? En déduire la probabilité q pour que ce groupe soit positif.

b) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de groupes positifs. Montrer que Y suit une loi binomiale de paramètres (n ; q) . En déduire l'espérance E(Y) de la variable aléatoire Y .

c) Si Y désigne le nombre de groupes positifs, calculer le nombre d'analyses faites au total avec la méthode B. X désignant la variable aléatoire égale au nombre d'analyses effectuées avec la méthode B, calculer l'espérance mathématique de X.

2° Dans cette question on donne n = 5. Représenter alors graphiquement la fonction de répartition de X

3° Comparaison des méthodes A et B

a) En remplaçant $0{,}99^r = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^r$ par sa valeur approchée $1 - \frac{r}{100}$, montrer que : $E(X) = 10\left(r + \frac{100}{r}\right)$

b) Soit la fonction f définie sur] 0 ;1000] par : $f(x) = 10\left(x + \frac{100}{x}\right)$. Dresser le tableau des variations de f.

Résoudre l'équation f(x) = 1000 et l'inéquation f(x) < 1000 . En déduire les valeurs de r pour lesquelles la méthode B est moins coûteuse que la méthode A , ainsi que la valeur de r minimisant le coût de la méthode B.

$\boxed{6}$ 1° Lors d'un concours d'équitation un cavalier effectue un parcours de 1 500 m à la vitesse de 10 km/h et franchit sur ce parcours six obstacles indépendants les uns des autres.
Pour ce cavalier, la probabilité de franchir «sans faute» un obstacle est $\frac{2}{3}$; le passage sans faute d'un obstacle ne ralentit pas le cavalier, tandis qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'obstacles franchis sans faute.
Quelle est la nature de la loi de probabilité de X ?
Calculer l'espérance mathématique.
En déduire la durée moyenne du parcours.

2° Ce cavalier doit ensuite effectuer à cheval deux sauts, indépendants l'un de l'autre.
Pour chaque saut, il lui est attribué 0, 2 ou 5 points.
La probabilité d'avoir 5 points est $\frac{2}{3}$, celle d'avoir 2 points est $\frac{1}{6}$, celle d'avoir 0 point est $\frac{1}{6}$
On considère la variable aléatoire Y qui, aux deux sauts effectués, associe le nombre de points totalisés.
Quelles sont les valeurs prises par Y ?
Déterminer la loi de probabilité de Y.
En déduire la probabilité de l'événement :$Y \geq 5$.