AMERIQUE DU NORD BACCALAUREAT S 1ER JUIN 2005

EXERCICE 1 4 points

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1° Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3\,i$, $-3-i$ et $2{,}08+1{,}98\,i$.
Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle

(b) : rectangle et non isocèle

(c) : rectangle et isocèle

(d) : ni rectangle ni isocèle

2° A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4\,i}{z+2}$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

(a): un cercle de rayon 1

(b) : une droite

(c) : une droite privée d'un point

(d): un cercle privé d'un point

3° Les notations sont les mêmes qu'à la question 2°
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a): un cercle

(b) : une droite

(c) : une droite privée d'un point

(d): un cercle privé d'un point

4° Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i.
L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

(a) $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$

(b) $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$

(c) $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$

(d) $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$

EXERCICE 2 6 points

Le graphique de l'annexe sera complété et remis avec la copie.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$.

1° Etudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 2].Montrer que si $x \in [1 ; 2]$ alors $f(x) \in [1 ; 2]$.

2° (U_n) et (V_n) sont deux suites définies sur N par :

- $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$.
- $V_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = f(V_n)$.

a) Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2].
Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (U_n) et (V_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
A partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (U_n) et (V_n) ?

b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

- Pour tout entier naturel n, $1 \leq V_n \leq 2$.
- Pour tout entier naturel n, $V_{n+1} \leq V_n$.

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

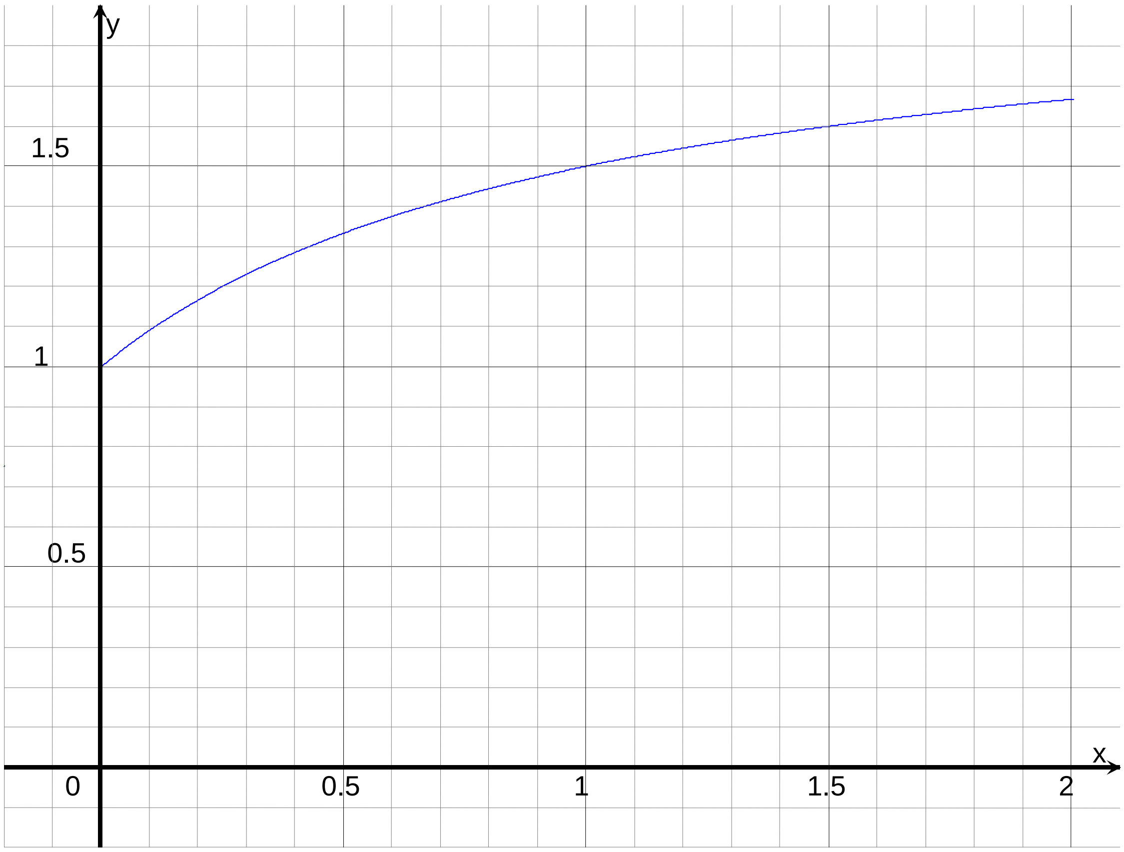
- Pour tout entier naturel n, $1 \leq U_n \leq 2$.
- Pour tout entier naturel n, $U_n \leq U_{n+1}$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{(V_n + 1)(U_n + 1)}$

En déduire que pour tout entier naturel n, $V_n - U_n \geq 0$ et $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{4}(V_n - U_n)$

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

e) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers un même réel α.
Déterminer la valeur exacte de α.



y
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
x

EXERCICE 3   5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par : $f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).
1° a) Etudier la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2° a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.

c) Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

3° A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

4° a) Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.

b) Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.

EXERCICE 4   5 points

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.
On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).
Un joueur fait une partie en deux étapes :
Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.
Deuxième étape :
• si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
• si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
• si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
A la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).
On définit les évènements suivants :

D1 : « le dé indique 1 »   D2 : « le dé indique 2 »

D3 : « le dé indique 3 »   G: « la partie est gagnée ».

A et B étant deux évènements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.
1° a) Déterminer les probabilités $p_{D1}(G)$, $p_{D2}(G)$, et $p_{D3}(G)$
b) Montrer alors que $p(G) = \frac{23}{180}$.

2° Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

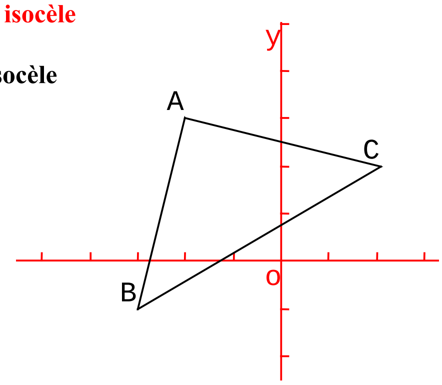
3° Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.
Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9?

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1° Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives − 2 + 3 i, − 3 − i et 2,08 + 1,98 i. Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle **(b) : rectangle et non isocèle**

(c) : rectangle et isocèle **(d) : ni rectangle ni isocèle**



$z_A = -2 + 3\,i$, $z_B = -3 - i$ et $z_C = 2{,}08 + 1{,}98\,i$

(b) : rectangle et non isocèle

Le triangle semble rectangle isocèle en A.

Pour le vérifier le plus simple est de calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -\dfrac{50}{51}\,i$.

$\text{Arg}\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc ABC est rectangle en A.

$\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| \neq 1$ donc ABC n'est pas isocèle en A.

2° A tout nombre complexe z $\neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z - 4\,i}{z + 2}$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que |z'| = 1 est :

(a): un cercle de rayon 1 **(b) : une droite**

(c) : une droite privée d'un point **(d): un cercle privé d'un point**

(b) : une droite

Soit A le point d'affixe 4 i et B le point d'affixe – 2. On a alors : $z' = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ avec M ≠ B

$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right| = 1 \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$ M appartient à Δ, la médiatrice de [AB]

$B \notin \Delta$ donc l'ensemble cherché est la droite Δ

3° Les notations sont les mêmes qu'à la question 2°

L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a): un cercle **(b) : une droite**

(c) : une droite privée d'un point **(d): un cercle privé d'un point**

(c) : une droite privée d'un point M ≠ B

$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg } z' = k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } z = z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Arg}\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = k\,\pi \\ \text{ou } M = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = k\,\pi \\ \text{ou } M = A \end{cases} \Leftrightarrow$ M appartient (AB)

L'ensemble cherché est la droite (AB) privée de B.

4° Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

(a) $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$ **(b)** $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$

(c) $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$ **(d)** $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$

(d) $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$

$z' - z_D = e^{-i\,\pi/3}\,(z - z_D) \Leftrightarrow z' = i + \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - i) \Leftrightarrow z' = i + \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\,i + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$

Le graphique de l'annexe sera complété et remis avec la copie. Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par f (x) = $\frac{2x+1}{x+1}$. 1° Etudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 2].Montrer que si x ∈ [1 ; 2] alors f (x) ∈ [1 ; 2].

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$. $f(1) = \frac{3}{2} > 1$ et $f(2) = \frac{5}{3} < 2$

x	1	2
signe de f '	+	
f	f(1) ↗	f(2)

Pour tout réel x de [1 , 2], $1 < f(1) \le f(x) \le f(2) < 2$.

2° (U_n) et (V_n) sont deux suites définies sur N par :
- **$U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$.**
- **$V_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = f(V_n)$.**

a) Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2]. Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (U_n) et (V_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
A partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (U_n) et (V_n) ?
la suite (U_n) semble croissante et la suite (V_n) semble décroissante.

b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
- **Pour tout entier naturel n, $1 \le V_n \le 2$.**
- **Pour tout entier naturel n, $V_{n+1} \le V_n$.**

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
- **Pour tout entier naturel n, $1 \le U_n \le 2$.**
- **Pour tout entier naturel n, $U_n \le U_{n+1}$.**

$\mathscr{P}(n) : 1 \le V_{n+1} \le V_n \le 2$

Initialisation : $V_0 = 2$ et $V_1 = \frac{5}{3}$. On a bien : $1 \le V_0 \le V_1 \le 2$

Hérédité : Si $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée alors : $1 \le V_{n+1} \le V_n \le 2$ comme f est croissante sur [1 , 2]
on a donc : $1 \le f(1) \le f(V_{n+1}) \le f(V_n) \le f(2) \le 2$ d'où $1 \le V_{n+2} \le V_{n+1} \le 2$ donc $\mathscr{P}(n + 1)$ est aussi vérifiée.
Conclusion : la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire à partir du rang 0 elle est donc vérifiée pour tout entier n.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{(V_n+1)(U_n+1)}$

En déduire que pour tout entier naturel n, $V_n - U_n \ge 0$ et $V_{n+1} - U_{n+1} \le \frac{1}{4}(V_n - U_n)$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{2V_n+1}{V_n+1} - \frac{2U_n+1}{U_n+1} = \frac{(2V_n+1)(U_n+1) - (2U_n+1)(V_n+1)}{(V_n+1)(U_n+1)} =$$

$$\frac{2U_nV_n + 2V_n + U_n + 1 - 2U_nV_n - 2U_n - V_n - 1}{(V_n+1)(U_n+1)} = \frac{V_n - U_n}{(V_n+1)(U_n+1)}$$

On démontre, par récurrence que pour tout entier n , $V_n - U_n \ge 0$. On pose $\mathscr{P}'(n) : V_n - U_n \ge 0$.
Initialisation : $V_0 = 2$ et $U_0 = 1$ donc $V_0 - U_0 \ge 0$ donc $\mathscr{P}'(0)$ est vérifiée.
Hérédité : Si $\mathscr{P}'(n)$ est vérifiée alors $V_n - U_n \ge 0$.

on sait que ; $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{(V_n+1)(U_n+1)}$. $\left.\begin{array}{l} V_n - U_n \ge 0 \\ U_n + 1 > 0 \\ V_n + 1 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\frac{V_n - U_n}{(V_n+1)(U_n+1)} \ge 0$ donc $V_{n+1} - U_{n+1} \ge 0$.

La propriété $\mathscr{P}'(n + 1)$ est donc aussi vérifiée.
Conclusion : la propriété $\mathscr{P}'$ est héréditaire à partir du rang 0 elle est donc vérifiée pour tout entier n.

On sait que : $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{(V_n+1)(U_n+1)}$

$V_n + 1 \ge 1 + 1$ et $V_n + 1 \ge 1 + 1$ donc $\frac{1}{(V_n+1)(U_n+1)} \le \frac{1}{2 \times 2}$

Comme $V_n - U_n$ est positif on peut dire que : $\frac{V_n - U_n}{(V_n+1)(U_n+1)} \le \frac{1}{4}(V_n - U_n)$

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

On démontre, par récurrence que pour tout entier n , $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. On pose $\mathscr{P}$" (n) : $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Initialisation : $V_0 - U_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$ on a donc bien : $V_0 - U_0 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0$

Hérédité : Si $\mathscr{P}$ "(n) est vérifiée alors $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

On sait que : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{4}(V_n - U_n) \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$. On a donc bien : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

La propriété $\mathscr{P}$" (n + 1) est donc aussi vérifiée.

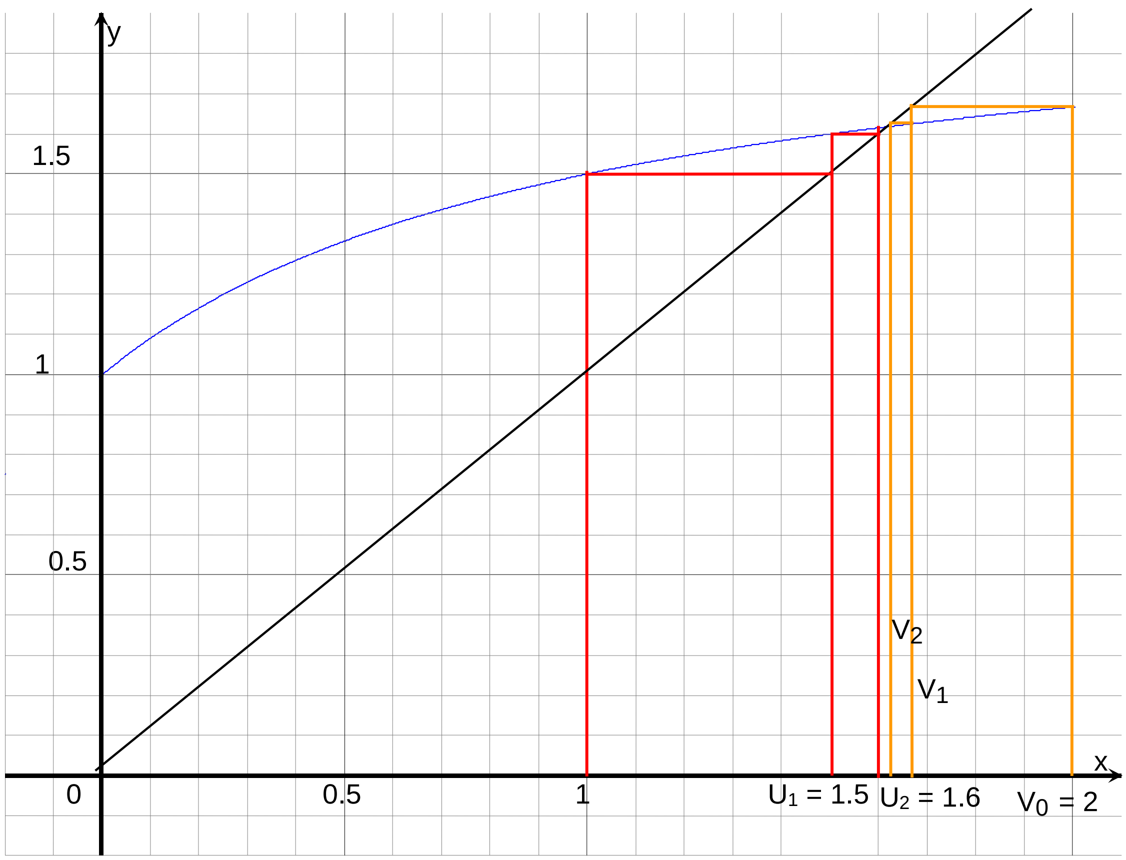
Conclusion : la propriété $\mathscr{P}$" est héréditaire à partir du rang 0 elle est donc vérifiée pour tout entier n.

e) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers un même réel α. Déterminer la valeur exacte de α.

e) $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n - U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. $\left.\begin{array}{c}(U_n) \text{ est croissante} \\ (V_n) \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} V_n - U_n = 0\end{array}\right\}$ les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite α. $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = f(\alpha)$ car f est continue sur [1 , 2].

$\alpha = f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 1} \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

De plus $\alpha \in [1 , 2]$ donc $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par : $f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm). 1° a) Etudier la limite de f en + ∞ .

1° a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - e^{-x} = 2 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

$f(x) - (2x - 2) = (x-1)(2-e^{-x}) - 2x + 2 = 2x - 2 - x e^{-x} + e^{-x} - 2x + 2 = -x e^{-x} + e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x-2) = 0$. Δ est bien asymptote à $\mathscr{C}$ en + ∞ .

c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

$f(x) - (2x - 2) = e^{-x}(1 - x)$.

x	$-\infty$ 1 $+\infty$	
$1 - x$	+ 0	−
$e^{-x}(1 - x)$.	+ 0	−
	$\mathscr{C}$ au dessus de Δ	$\mathscr{C}$ au dessous de Δ

2° a) Calculer f '(x) et montrer que $f'(x) = x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

$f'(x) = 1 \times (2 - e^{-x}) + (x - 1) e^{-x} = 2 - e^{-x} + x e^{-x} - e^{-x}$

$= x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, f '(x) > 0.

$\left.\begin{array}{c} x e^{-x} > 0 \\ 2(1 - e^{-x}) > 0 \end{array}\right\}$ donc $x e^{-x} + 2(1 - e^{-x}) > 0$

c) Préciser la valeur de f '(0), puis établir le tableau de variations de f.

$f'(0) = 0 \times e^0 + 2(1 - e^0) = 0$.

x	0	$+\infty$
signe de f '	0	+
f	− 1 ↗	+ ∞

3° A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations x = 1 et x = 3.

Sur [1 , 4] $\mathscr{C}$ est au dessous de Δ

l'unité graphique est de 2 cm donc l'aire cherché est égale à :

$\int_1^4 2(x - 2 - f(x))\,dx \times 4$.

$\mathscr{A} = 4 \times \int_1^4 -e^{-x} + x e^{-x}\,dx = -4 \times \int_1^4 e^{-x}\,dx + 4 \times \int_1^4 x e^{-x}\,dx$

On calcule $\int_1^4 x e^{-x}\,dx$ à l'aide d'une intégration par partie.

$\left.\begin{array}{c} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} \text{ et } v(x) = -e^{-x} \end{array}\right\}$ donc $\int_1^4 x e^{-x}\,dx = [-x e^{-x}]_1^4 - \int_1^4 (-e^{-x})\,dx = -4e^{-4} + e^{-1} - [e^{-x}]_1^4$

$= -4e^{-4} + e^{-1} - e^{-4} + e^{-1} = -5e^{-4} + 2e^{-1}$

$\mathscr{A} = 4 \times [e^{-x}]_1^4 + 4 \times (-5e^{-4} + 2e^{-1}) = 4e^{-4} - 4e^{-1} - 20e^{-4} + 8e^{-1} = -16e^{-4} + 4e^{-1}$

4° a) Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.

La tangente en A à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ si et seulement si $f'(a) = 2$

$f'(x) = 2 \Leftrightarrow x e^{-x} + 2(1 - e^{-x}) = 2 \Leftrightarrow e^{-x}(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$f(2) = 2 - e^{-2}$ et $A\left(2 , 2 - e^{-2}\right)$

b) Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ

Remarque : on peut utiliser directement la formule du cours : $d(A, \Delta) = \dfrac{|a x_A + b y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

où l'équation de Δ est : $a x + b y + c = 0$ ou bien la retrouver.

Equation de Δ : $2x - y - 2 = 0$. Soit H le projeté orthogonal de A sur Δ.

$\overrightarrow{AH} = k\,\vec{n}$ où $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Δ.

$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = k \,\|\vec{n}\|^2$ et $AH = |k| \times \|\vec{n}\| = \dfrac{|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

$H \in \Delta$ donc $2x_H - y_H = 2$ et donc $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = |2(x_H - x_A) - (y_H - y_A)| = |2 - 2x_A + y_A| = |2x_A - y_A - 2|$

et donc $d(A, \Delta) = AH = \dfrac{|2x_A - y_A - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{|2 \times 2 - 2 + e^{-2} - 2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{e^{-2}\sqrt{5}}{5}$. on a donc $AH \approx 0{,}12$ cm

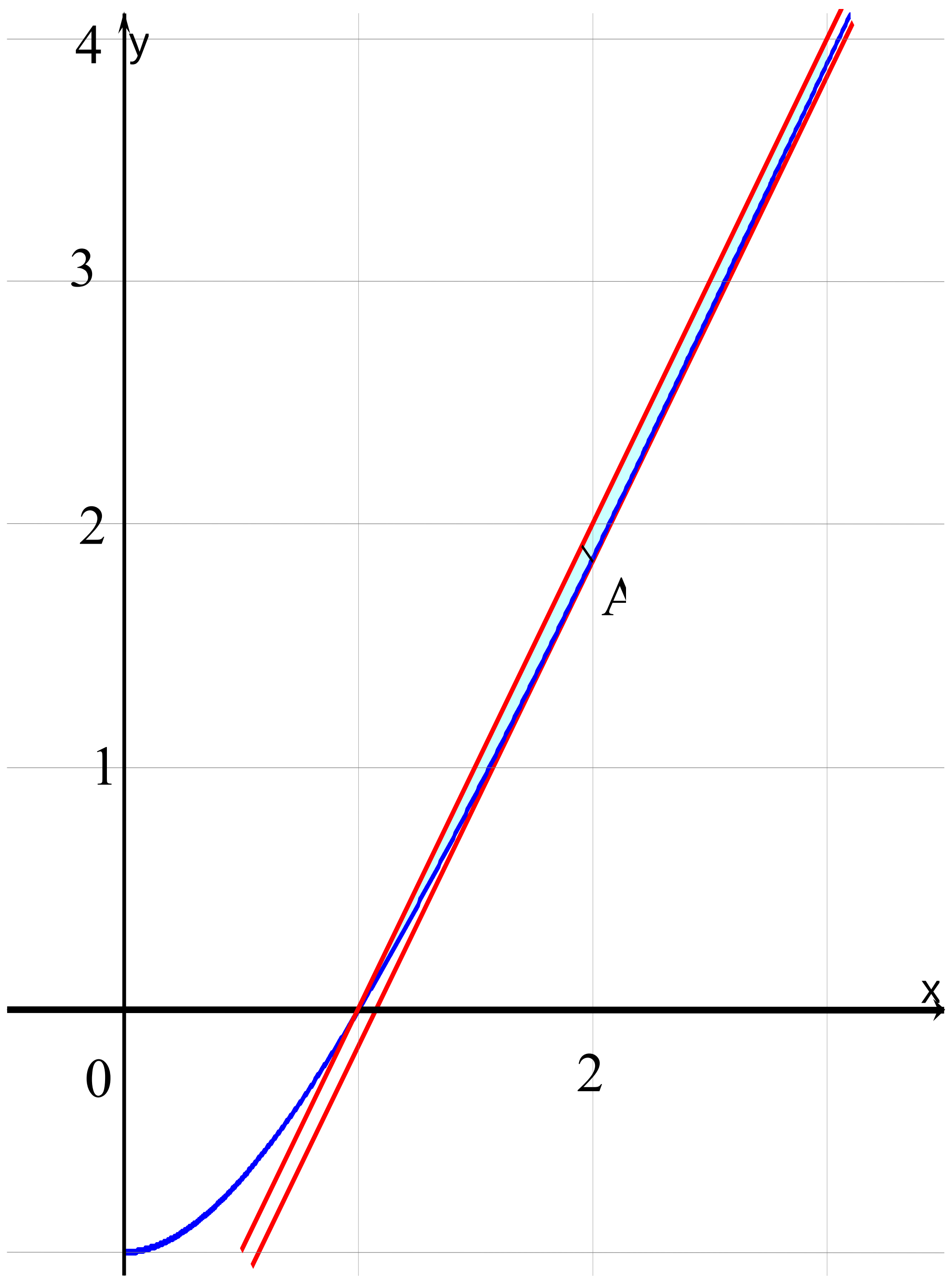
Variante plus "analytique"

Le projeté orthogonal de A sur Δ a ses coordonnées qui vérifient :

$\begin{cases} 2\,x - y - 2 = 0 \text{ car } H \in \Delta \\ 2\,(y - y_A) - (-1)\,(x - x_A) = 0 \text{ car } \overrightarrow{AH} \text{ et } \vec{n} \text{ colinéaires} \end{cases}$

$\begin{cases} 2\,x - y - 2 = 0 \\ 2\,(y - (2 - e^{-2})) + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x - y - 2 = 0 \\ x + 2\,y - 6 - 2\,e^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\,x - 2 \\ x + 4\,x - 4 - 6 - 2\,e^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\,e^{-2}/5 \\ y = 2 - 4\,e^{-2}/5 \end{cases}$

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 2 - 2\,e^{-2}/5 - 2 \\ 2 - 4\,e^{-2}/5 - 2 + e^{-2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -2\,e^{-2}/5 \\ e^{-2}/5 \end{pmatrix}$ et $AH = \sqrt{4+1} \times \dfrac{e^{-2}}{5} = \dfrac{e^{-2}\sqrt{5}}{5}$



EXERCICE 4 5 points

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3. On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes). Un joueur fait une partie en deux étapes :
Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu. Deuxième étape :
• si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
• si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
• si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
A la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s). On définit les évènements suivants :

D1 : « le dé indique 1 » **D2 : « le dé indique 2 »**

D3 : « le dé indique 3 » **G: « la partie est gagnée ».**

A et B étant deux évènements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.
1° a) Déterminer les probabilités $p_{D1}(G)$, $p_{D2}(G)$, et $p_{D3}(G)$

Si D1 est réalisé alors il tire au hasard une boule de l'urne et gagne la partie si cette boule porte une voyelle :
$P_{D1}(G) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Si D_2 est réalisé alors, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne et gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle. Il y a alors $\binom{4}{2}$ manières de choisir deux voyelles parmi quatre et $\binom{10}{2}$ manières de choisir deux boules parmi huit : $P_{D2}(G) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{4 \times 3}{10 \times 9} = \frac{2}{15}$

Si D_3 est réalisé alors il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne et il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle. Il y a alors $\binom{4}{3}$ manières de choisir trois voyelles parmi quatre et $\binom{10}{3}$ manières de choisir deux boules parmi huit : $P_{D2}(G) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{30}$

b) Montrer alors que $p(G) = \frac{23}{180}$.

Le dé possède une face qui porte le numéro 1, deux faces qui portent le numéro 2 et trois faces qui portent le numéro 3. On a donc $p(D_1) = \frac{1}{6}$, $p(D_2) = \frac{2}{6}$ et $p(D_3) = \frac{3}{6}$

$p(D_1 \cap G) = p(D_1) \times P_{D1}(G) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$

$p(D_2 \cap G) = p(D_2) \times P_{D2}(G) = \frac{2}{15} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{45}$

$p(D_3 \cap G) = p(D_3) \times P_{D3}(G) = \frac{1}{30} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{60}$

$P(G) = \frac{1}{15} + \frac{2}{45} + \frac{1}{60} = \frac{12 + 8 + 3}{180} = \frac{23}{180}$

2° Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

$p_G(D_1) = \frac{p(G \cap D_1)}{p(G)} = \frac{1/15}{23/180} = \frac{1}{15} \times \frac{180}{23} = \frac{12}{23}$

3° Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9?

Une partie est une épreuve de Bernouilli de paramètre $p = p(G) = \dfrac{23}{180}$

La variable aléatoire X qui représentent le nombre de parties gagnées lors de la répétition de 6 épreuves indépendantes de Bernouilli suit une loi binomiale de paramètre 6 et $\dfrac{23}{180}$

$p(X = 2) = \binom{6}{2}\left(\dfrac{23}{180}\right)^2 \times \left(1 - \dfrac{23}{180}\right)^4 \approx 0{,}01$

Soit E l'événement "gagner au moins une partie"

l'événement contraire $\overline{E}$ est " ne gagner aucune partie" et $p(\overline{E}) = \left(1 - \dfrac{23}{180}\right)^6 = \dfrac{157^6}{180^6}$

$p(E) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - \left(\dfrac{157}{180}\right)^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \left(\dfrac{157}{180}\right)^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow n \times \ln\left(\dfrac{157}{180}\right) \leq \ln(0{,}1) \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln 157 - \ln 180}$

car $\ln\left(\dfrac{157}{180}\right) = \ln 157 - \ln 180 < 0$

$\dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln 157 - \ln 180} \approx 16{,}8.$

Il doit faire au moins 17 parties pour gagner au moins une fois avec une probabilité de 0,9.