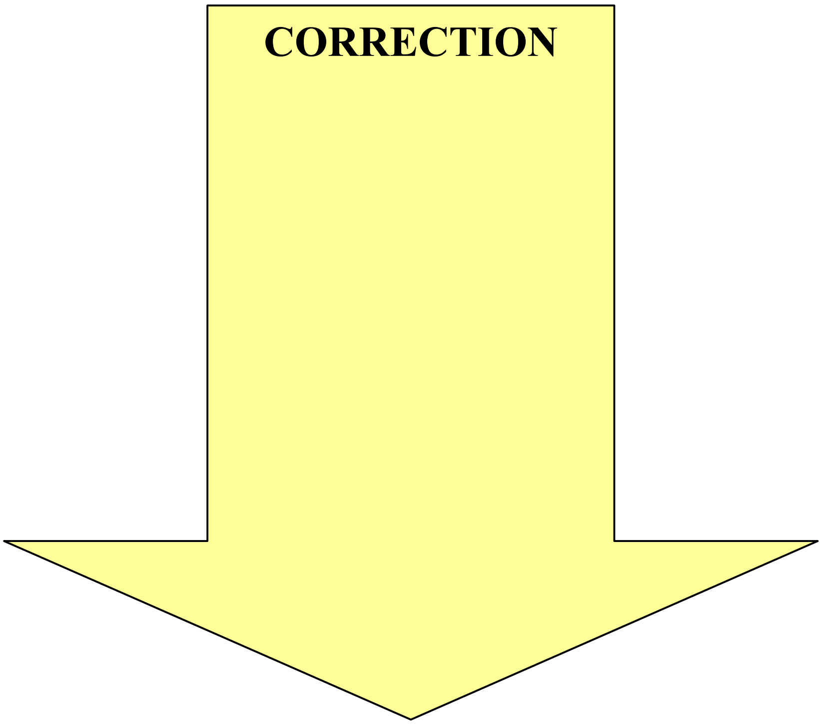
Complexe France septembre 2004 5 points
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).
1° Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante :
$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$.
2° On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes
$a = 4\sqrt{3} - 4i$ et $b = 4\sqrt{3} + 4i$.
a) Ecrire a et b sous forme exponentielle.
b) Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.
3° On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$
Déterminer l'affixe d du point D.
4° On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O; −1), (D; + 1), (B ; + 1).
a) Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.
b) Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.
c) Montrer que les points C, D et G sont alignés.
d) Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
5° Quelle est la nature du triangle AGC ?



Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

1° Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante : $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$.

$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$

$\Delta = (8\sqrt{3})^2 - 4 \times 64 = 3 \times 64 - 4 \times 64 = -64 = (8i)^2$

Les solutions sont donc $z_1 = \dfrac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$ et $z_2 = 4\sqrt{3} - 4i$

2° On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = 4\sqrt{3} - 4i$ et $b = 4\sqrt{3} + 4i$.

a) Ecrire a et b sous forme exponentielle.

$a = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 8e^{-i\pi/6}$ et $b = 8e^{i\pi/6}$

b) Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

$OA = 8 = OB$. $AB = |b - a| = |4\sqrt{3} + 4i - 4\sqrt{3} + 4i| = 8$.

On a $OA = OB = AB = 8$ donc OAB est équilatéral.

3° On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$

Déterminer l'affixe d du point D.

L'écriture complexe d'une rotation de centre Ω d'angle θ est : $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$

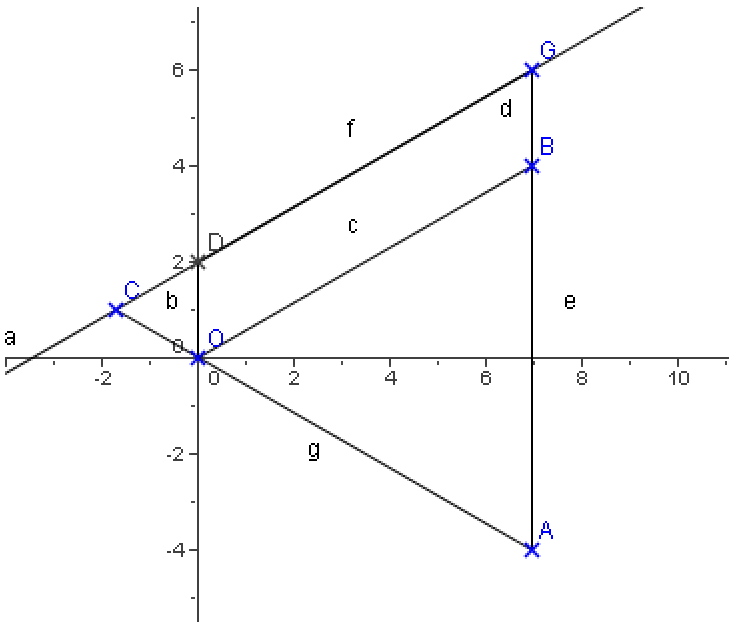
On a donc $d - 0 = e^{-i\pi/3}(c - 0)$ c'est à dire $d = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-\sqrt{3} + i) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2} + \dfrac{3}{2}i + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2i$.

4° On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O; −1), (D; + 1), (B ; + 1).

a) Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.

$-1 + 1 + 1 \neq 0$ donc G existe et $g = \dfrac{0 + d + b}{-1 + 1 + 1} = 2i + 4\sqrt{3} + 4i = 4\sqrt{3} + 6i$

b) Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.



c) Montrer que les points C, D et G sont alignés.

Affixe de $\overrightarrow{CD}$: $d - c = 2i - (-\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i$

Affixe de $\overrightarrow{DG}$: $g - d = 4\sqrt{3} + 6i - 2i = 4\sqrt{3} + 4i = 4 - \sqrt{3} + i$. On a donc $\overrightarrow{CD} = 4\,\overrightarrow{DG}$ et on peut conclure que les points C, D et G sont alignés

d) Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Affixe de } \overrightarrow{DG} : g - d = 4\sqrt{3} + 4i \\ \text{Affixe de } \overrightarrow{OB} : b = 4\sqrt{3} + 4i\end{array}\right\}\text{ donc } \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{OB} \text{ donc OBGD est un parallélogramme.}$$

5° Quelle est la nature du triangle AGC ?

$g - a = 4\sqrt{3} + 6i - 4\sqrt{3} + 4i = 10i$; $g - c = 4\sqrt{3} + 6i + \sqrt{3} - i = 5\sqrt{3} + 5i$

et $c - a = -\sqrt{3} + i - 4\sqrt{3} + 4i = -5\sqrt{3} + 5i$; On a $|g - c| = |c - a| = |g - a| = 10$.

Le triangle AGC est donc équilatéral.