Liban mai 2006

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(2 ; 1 ; 3)$, $B(-3 ; -1 ; 7)$ et $C(3 ; 2 ; 4)$.

1° Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2° Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$

a) Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

3° Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC).

a) Montrer que H est le barycentre de $(A ; -2)$, $(B ; -1)$ et $(C ; 2)$.

b) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1, des points M de l'espace tels que

$$(-2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

En préciser les éléments caractéristiques.

c) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2, des points M de l'espace tels que:

$$\| -2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \| = \sqrt{29}$$

En préciser les éléments caractéristiques.

d) Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

e) Le point $S(-8 ; 1 ; 3)$ appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

EXERCICE 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1° a) Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport ,$\sqrt{2}$.

b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Placer les points A, B et B'.

2° On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'tel que : $z' = (1 + i) z + 1$.

a) Montrer que B a pour image B' par f .

b) Montrer que A est le seul point invariant par f .

c) Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\frac{z' - z}{i - z} = -i$.

Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.

En déduire une méthode de construction de M' à partir de M, pour M distinct de A.

3° a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $| z - 2 | = \sqrt{2}$.

b) Démontrer que $z' - 3 - 2i = (1 + i)(z - 2)$.

En déduire que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.

c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

EXERCICE 3 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x+1)$.

Sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est donnée en annexe.

1° a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe ($\mathscr{C}$) au point O ?

2° On pose $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq 1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = a\,x + b + \frac{c}{x+1}.$$

b) Calculer I.

3° A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4° Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$.

1° Déterminer le sens de variation de la suite (U_n). La suite (U_n) converge-t-elle ?

2° Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

En déduire la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 4 3 points

Commun à tous les candidats La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x}\,dx$$

1° Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.

2° A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

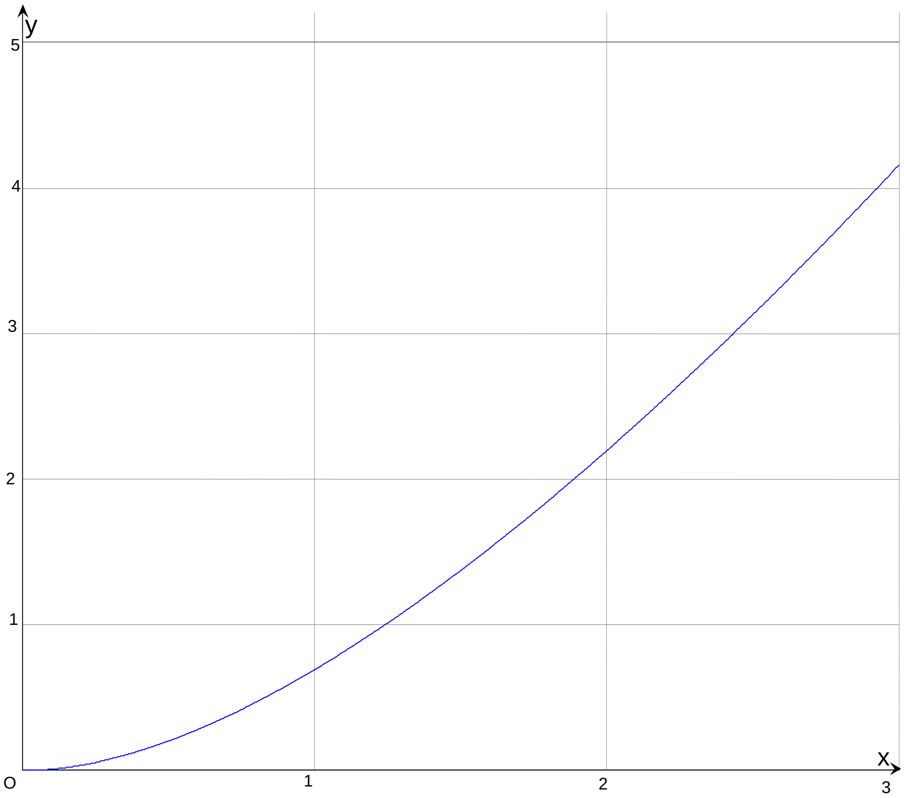
3° Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.

4° Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

5° On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.

Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Annexe
Exercice3
Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur Courbe $(\mathscr{C})$



CORRECTION

Liban mai 2006 EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points A(2 ; 1 ; 3), B(– 3 ; – 1 ; 7) et C(3 ; 2 ; 4). 1° Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-2\\-1-1\\7-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-2\\2-1\\4-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et A ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2° Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$ a) Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(-5)+(-3)\times(-2)+1\times4=-10+6+4=0$ donc $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$ donc (d) ⊥ (AB)

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times1+(-3)\times1+1\times1=2-3+1=0$ donc $\vec{u}\perp\overrightarrow{AC}$ donc (d) ⊥ (AC).

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

$\vec{u}$ est un vecteur normal de (ABC) donc une équation du plan (ABC) est de la forme :

$2x-3y+z=2x_A-3y_A+z_A$ c'est à dire $2x-3y+z=2\times2-3\times1+3$

Equation de (ABC) : $\boxed{2x-3y+z=4}$

3° Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC). a) Montrer que H est le barycentre de (A ; – 2), (B ; – 1) et (C ; 2).

Soit G le barycentre de (A ; – 2), (B ; – 1) et (C ; 2).

$x_G=\dfrac{-2\times2-1\times(-3)+2\times3}{-2-1+2}=-5$	$y_G=\dfrac{-2\times1-1\times(-1)+2\times2}{-1}=-3$	$z_G=\dfrac{-2\times3-1\times7+2\times4}{-1}=5$

G est le barycentre de (A ; – 2), (B ; – 1) et (C ; 2) donc G ∈ (ABC)

Le point G est-il un point de (d)

$\begin{cases}-5=-7+2t\\-3=-3t\\5=4+t\end{cases}$ ⇔ t = 1 donc G est un point de (d). G est le point d'intersection de (d) et de (ABC) donc G = H

b) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1, des points M de l'espace tels que $(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})\cdot(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$
En préciser les éléments caractéristiques.

H est la barycentre de {(A ; – 2), (B ; – 1) et (C ; 2)}, donc pour tout point M,

$-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(-2-1+2)\overrightarrow{MH}=-\overrightarrow{MH}$

$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}$

$M\in\Gamma_1\Leftrightarrow-\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{CB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}\perp\overrightarrow{BC}$

Donc Γ_1 est donc le plan perpendiculaire à (BC) passant par H.

c) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2, des points M de l'espace tels que: $\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29}$
En préciser les éléments caractéristiques.

$M\in\Gamma_2\Leftrightarrow\|-\overrightarrow{MH}\|=\sqrt{29}$

Γ_2 est la sphère de centre H de rayon $\sqrt{29}$

d) Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

Le plan Γ_1 passe par le centre de la shère Γ_2 donc l'intersection de Γ_1 et de Γ_2 est un cercle de centre H de rayon $\sqrt{29}$

e) Le point S (– 8 ; 1 ; 3) appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2.

H(– 5 ,– 3 , 5) donc $\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix}-5+8\\-3-1\\5-3\end{pmatrix}$ et $SH=\sqrt{3^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$ donc $S\in\Gamma_2$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3+3\\2+1\\4-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SH}\cdot\overrightarrow{BC}=3\times6+(-4)\times3+2\times(-3)=18-12-6=0$ donc $S\in\Gamma_1$.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). On prendra 2 cm pour unité graphique. Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1° a) Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport ,$\sqrt{2}$.

Soit z_1 l'affixe du point B_1. On sait que : $z_1 - z_A = \sqrt{2}\,(z_B - z_A)$

$z_1 - i = \sqrt{2}\,(2 - i) \Leftrightarrow z_1 = i + 2\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + i\,(1 - \sqrt{2})$

b) Déterminer l'affixe du point B ' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Placer les points A, B et B '.

$$z_{B'} - z_A = e^{i\pi/4}\,(z_1 - z_A) \text{ donc } z_{B'} = i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2\sqrt{2} + i\,(1 - \sqrt{2}) - i) = i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (2\sqrt{2} - i\sqrt{2}) =$$

$$i + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = i + 2 - i + 2\,i + 1 = 3 + 2\,i$$

2° On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'tel que : z ' = (1 + i) z + 1. a) Montrer que B a pour image B ' par f .

$z_B' = (1 + i) \times 2 + 1 = 2 + 2\,i + 1 = 3 + 2\,i = z_{B'}$

b) Montrer que A est le seul point invariant par f .

$z' = z \Leftrightarrow (1 + i)\,z + 1 = z \Leftrightarrow i\,z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{i} \Leftrightarrow z = i.$

c) Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\frac{z' - z}{i - z} = -i$. Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles. En déduire une méthode de construction de M ' à partir de M, pour M distinct de A.

$$\frac{z' - z}{i - z} = \frac{(1 + i)\,z + 1 - z}{i - z} = \frac{i\,z + 1}{i - z} = \frac{i\,(i\,z + 1)}{i\,(i - z)} = i\,\frac{i\,z + 1}{-1 - i\,z} = -i$$

3° a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$

$|\,z - 2\,| = BM$ donc $|\,z - 2\,| = \sqrt{2} \Leftrightarrow BM = \sqrt{2}$

Σ_1 est donc le cercle de centre B de rayon $\sqrt{2}$.

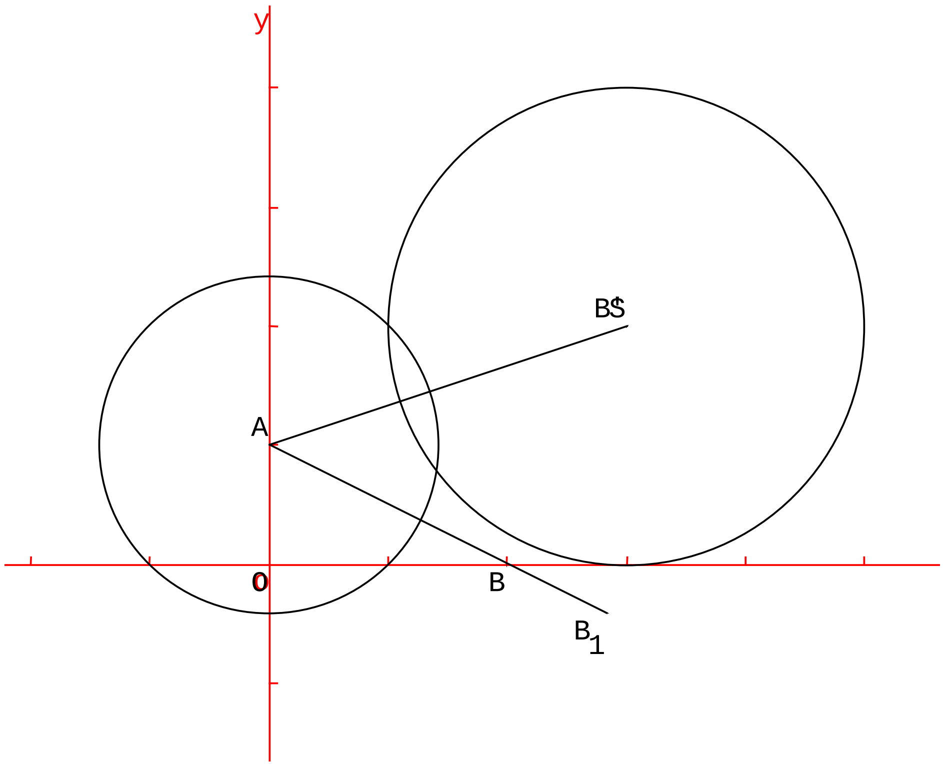
b) Démontrer que z ' – 3 – 2 i = (1 + i) (z – 2). En déduire que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M ' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.

$z' - 3 - 2\,i = (1 + i)\,z + 1 - 3 - 2\,i = z + i\,z + 1 - 3 - 2\,i = z\,(1 + i) - 2 - 2\,i = (1 + i)\,(z - 2).$

$|\,z - 2\,| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |\,1 + i\,| \times |\,z - 2\,| = |\,1 + i\,|\sqrt{2} \Leftrightarrow |\,z' - 3 - 2\,i\,| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \Leftrightarrow |\,z' - 3 - 2\,i\,| = 2.$

Σ_2 est donc le cercle de centre B ', point d'affixe 3 + 2 i, de rayon 2.

c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B '.



EXERCICE 3 Partie A : étude d'une fonction Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par : f (x) = x ln(x + 1). Sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans un repère orthogonal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) est donnée en annexe.

1° a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞ [.

f est le produit de deux fonctions dérivables sur [0 ; + ∞ [elle est donc dérivable sur [0 ; + ∞ [

$f'(x) = 1 \times \ln(1 + x) + x \times \dfrac{1}{x+1} = \ln(1 + x) + \dfrac{x}{x+1}$.

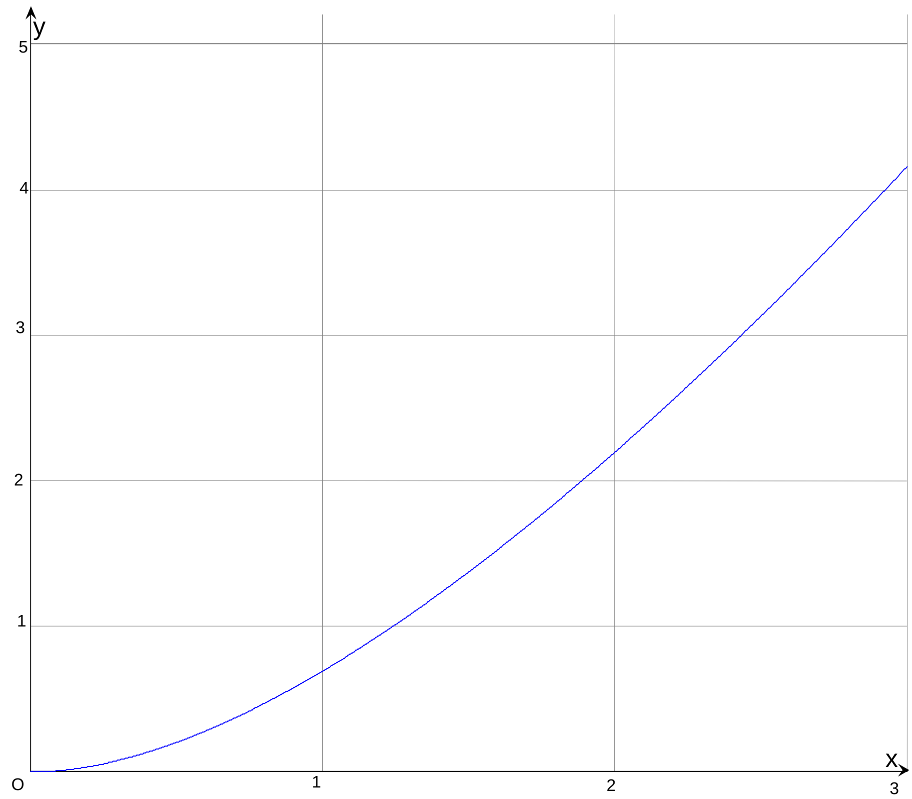
Pour tout réel x de [0 ; + ∞ [, $\ln(1 + x) \geq 0$ et $\dfrac{x}{x+1} \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$. f est donc croissante sur [0 ; + ∞ [.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe ($\mathscr{C}$) au point O ?

$f(0) = 0 \times \ln(1 + 0) = 0$ et $f'(0) = \ln(1 + 0) + \dfrac{0}{0+1} = 0$ donc l'axe des abscisses est bien tangent à ($\mathscr{C}$) au point O.

Annexe Exercice3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur Courbe ($\mathscr{C}$)



2° On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$ a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout x ≠ 1, $\dfrac{x^2}{x+1} = a\,x + b + \dfrac{c}{x+1}$.

$$\frac{x^2}{x+1} = a\,x + b + \frac{c}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{a\,x\,(x+1) + b\,(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{a\,x^2 + a\,x + b\,x + b + c}{x+1}$$

Il suffit de prendre a, b et c solutions du système : $\begin{cases} 1 = a \\ 0 = a + b \\ 0 = b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$ On a donc $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

b) Calculer I.

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 1 + \ln(1+1) - (0^2 - 0 + \ln(1+0)) = -\frac{1}{2} + \ln 2.$$

3° A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$) et les droites d'équations x = 0, x = 1 et y = 0.

Pour tout réel x de [0 , 1], f(x) ≥ 0 donc $A = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$\left.\begin{array}{r} u(x) = \ln(1+x) \text{ et } u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v'(x) = x \text{ et } v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$ Les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u ' et v ' sont continues sur l'intervalle d'intégration on peut donc intégrer par partie.

$$A = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\times\ln(1+1) - \frac{0}{2}\ln(1+0) - \frac{I}{2} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{4}.$$

4° Montrer que l'équation f (x) = 0,25 admet une seule solution sur l'intervalle [0 ; 1]. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

La fonction f est croissante et continue sur [0 , 1], f(0) = 0 et f(1) = ln 2.

On sait que 0,25 ∈ [0 , ln 2] donc , d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaire on peut dire que l'équation f(x) = 0,25 admet une solution et une seule dans l'intervalle [0 , 1].

$f(0{,}56) \le 0{,}25 \le f(0{,}565)$ donc $0{,}56 \le \alpha \le 0{,}565$

Partie B : étude d'une suite La suite (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$.

1° Déterminer le sens de variation de la suite (U_n). La suite (U_n) converge-t-elle ?

Pour tout réel x de [0 , 1], $x^n \ge x^{n+1}$ et $\ln(x+1) \ge 0$ donc $x^n \ln(x+1) \ge x^{n+1} \ln(x+1)$.

On peut intégrer les inégalités sur [0 , 1].

$\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx \ge \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\,dx$ donc $U_n \ge U_{n+1}$ donc la suite (U_n) est décroissante.

Pour tout réel x de [0 , 1], $x^n \ln(x+1) \ge 0$ donc $U_n \ge 0$.

la suite (U_n) est décroissante et est minorée par 0 elle est donc convergente.

2° Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \le U_n \le \dfrac{\ln 2}{n+1}$ En déduire la limite de la suite (U_n).

Pour tout entier naturel n non nul on a : $\forall x \in [0, 1]$, $0 \le x^n \ln(x+1) \le x^n \ln(1+1)$

En intégrant les inégalité on obtient. : $0 \le U_n \le \int_0^1 x^n \ln 2\,dx$

$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$ donc $U_n \le \dfrac{\ln 2}{n+1}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln 2}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

EXERCICE 4 3 points Commun à tous les candidats La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$. Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$

1° Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.

$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[- e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$

$p(X > 6) = 1 - p(X \leq 6) = 1 - \int_0^6 \lambda e^{-\lambda x} x = 1 - 1 + e^{-6\lambda}$

$p(X > 6) = 0,3 \Leftrightarrow e^{-6\lambda} = 0,3 \Leftrightarrow - 6\lambda = \ln 0,3 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0,3}{6}$

Donc $\lambda \approx 0,2007$

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2° A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

$P(X \leq t) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,2\,t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,2\,t} = 0,5 \Leftrightarrow - 0,2\, t = \ln (0,5) \Leftrightarrow t = -\dfrac{\ln 0,5}{0,2}$

$t \approx 4,47$ années c'est à dire $t \approx 4$ ans 6 mois.

3° Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.

$p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) = 1 - (1 - e^{-0,2 \times 2}) = e^{-0,4}$

4° Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

$$p_{X>2}(X \geq 6) = \frac{p(2 < X \leq 6)}{p(X > 2)} = \frac{\int_2^6 0,2\, e^{-0,2\,t}\, dt}{1 - \int_0^2 0,2\, e^{-0,2\,t}\, dt} = \frac{- e^{-0,2 \times 6} + e^{-0,2 \times 2}}{1 - (1 - e^{-0,2 \times 2})} = 1 - e^{-0,2 \times 4} = p(X \leq 4) \approx 0,55.$$

5° On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.

Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

On répète 10 fois l'épreuve qui consiste à choisir un robot. les épreuves sont indépendantes.

Si N est la variable aléatoire qui compte le nombre de robot qui n'ont pas eu de panne au cours de 2 premières années alors on peut dire que N suit une loi binomilae de paramètre 10 et $p(X > 2) = e^{-0,4}$

$p(N \geq 1) = 1 - p(N = 0) = 1 - (e^{-0,4})^{10} = 1 - e^{-4} \approx 0,98$