1 Amérique du Sud novembre 1998

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que AH = BC = 4 .

On prendra le centimètre pour unité.

1° En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés $\{(A;2); (B;1); (C;1)\}$.

2° On désigne par M un point quelconque de $\mathscr{P}$.

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{V} = 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.

b) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que : $\| 2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \vec{v} \|$

3° On considère le système de points pondérés (A ; 2) ; (B ; n) ; (C ; n) où n est un entier naturel fixé.

a) Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. placer G_0, G_1, G_2 .

b) Montrer que le point G_n appartient au segment [AH] .

c) Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.

Préciser la position de G_n quand n tend vers $+\infty$.

d) Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que : $\| 2\,\overrightarrow{MA} + n\,\overrightarrow{MB} + n\,\overrightarrow{MC} \| = n\,\| \vec{v} \|$

Montrer que E_n est un cercle qui passe parle point A. En préciser le centre et le rayon, noté R_n .

e) Construire E_2.

CORRECTION

$\boxed{1}$ Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que AH = BC = 4. On prendra le centimètre pour unité. 1° En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés {(A;2); (B;1); (C;1)} .

G est le barycentre de (A,2), (B,1), (C,1) donc comme H est le milieu de [BC] par associativité on peut dire que G est le barycentre de (A,2), (H, 2) c'est à dire le milieu de [AH]

2° On désigne par M un point quelconque de $\mathcal{P}$.

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{V} = 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.

$2 - 1 - 1 = 0$ donc le vecteur $\overrightarrow{V}$ est indépendant du point M et on a $\overrightarrow{V} = 3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MH} = 2\,\overrightarrow{HM} + 2\,\overrightarrow{MA} = 2\,\overrightarrow{HA}$

$\|\ \overrightarrow{V}\ \| = 2 \times AH = 2 \times 4 = 8$.

b) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que : $\|\ 2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\ \| = \|\ \vec{v}\ \|$

G est le barycentre de (A,2), (B,1), (C,1) donc $2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\,\overrightarrow{MG}$

On a donc : $M \in E_1 \Leftrightarrow \|\ 4\,\overrightarrow{MG}\ \| = 8 \Leftrightarrow 4\,MG = 8 \Leftrightarrow MG = 2$.

E_1 est donc le cercle de centre G de rayon 2.

3° On considère le système de points pondérés (A ; 2) ; (B ; n) ; (C ; n) où n est un entier naturel fixé.

a) Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. placer G_0, G_1, G_2 .

$n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ donc $2 + n + n \neq 0$ donc le barycentre (A ; 2) ; (B ; n) ; (C ; n) existe.

G_0 est le barycentre de (A, 2), (B, 0), (C, 0) c'est donc le point A

G_1 est le barycentre de (A, 2), (B, 1), (C, 1) c'est donc le point G

G_2 est le barycentre de (A, 2), (B, 2), (C, 2) c'est donc le centre de gravité du triangle ABC.

b) Montrer que le point G_n appartient au segment [AH] .

G_n est le barycentre (A ; 2) ; (B ; n) ; (C ; n) donc, comme H est le milieu de [BC], par associativité on peut dire que G_n est le barycentre de (A, 2), (H, n+ n) c'est donc un point de la droite (AH)

Comme de plus 2 et 2 n sont de même signe on peut donc dire que G_n est sur le segment [AH].

c) Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers + ∞.
Préciser la position de G_n quand n tend vers + ∞ .

G_n est le barycentre de (A, 2), (H, 2 n) donc $\overrightarrow{AG_n} = \dfrac{2\,n}{2 + 2\,n}\,\overrightarrow{AH} = \dfrac{n}{n + 1}\,\overrightarrow{AH}$ donc $AG_n = \left|\dfrac{n}{n+1}\right| \times AH = \dfrac{4\,n}{n+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} AG_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4\,n}{n + 1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4\,n}{n} = 4$. Le point G_n a pour position limite le point H.

d) Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\ 2\,\overrightarrow{MA} + n\,\overrightarrow{MB} + n\,\overrightarrow{MC}\ \| = n\ \|\ \vec{v}\ \|$
Montrer que E_n est un cercle qui passe parle point A. En préciser le centre et le rayon, noté R_n .

G_n est le barycentre (A, 2), (B, n), (C, n) donc pour tout point M on a : $2\,\overrightarrow{MA} + n\,\overrightarrow{MB} + n\,\overrightarrow{MC} = (2 + n + n)\,\overrightarrow{MG_n}$

On a donc :

$M \in E_n \Leftrightarrow \|\ (2 + 2\,n)\,\overrightarrow{MG_n}\ \| = 8\,n \Leftrightarrow (2 + 2\,n)\,MG_n = 8\,n \Leftrightarrow MG_n = \dfrac{8\,n}{2 + 2\,n} \Leftrightarrow MG_n = \dfrac{4\,n}{n + 1} \Leftrightarrow MG_n = AG_n$

E_n est donc le cercle de centre G_n qui passe par A

e) Construire E_2.

E_2 est le cercle de diamètre [AH]