Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2004 EXERCICE 2 5 points

Dans le plan orienté muni d’un repère orthonormal direct, on considère ABC
un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA', ACB' et ABC'. On considère respectivement les points P, Q et R centres de gravités respectifs des triangles B CA', ACB' et ABC'.
On note a, b, c, a', b', c', p, q et r les affixes respectives des points A, B, C, A', B', C', P,Qet R.

1° a. Traduire, avec les affixes des points concernés, que C' est l’image de A dans une rotation d’angle de mesure dont on précisera le centre.

b) Montrer que $a' + b' + c' = a + b + c$.

2° En déduire que $p + q + r = a + b + c$.

3° En déduire que les triangles ABC, A'B'C' et PQR ont même centre de gravité.

4° Montrer que : $3(q - p) = (b' - c)+(c - a')+(a - b)$.

On admettra que, demême : $3(r - p) = (a - c)+(b - a') + (c' - b)$.

5° Justifier les égalités suivantes :

$a - c = e^{i\pi/3}(b' - c)$; $b - a' = e^{i\pi/3}(c - a')$; $c' - b = e^{i\pi/3}(a - b)$.

6° Déduire des questions 4° et 5° que le triangle PQR est équilatéral.

CORRECTION

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA ', ACB ' et ABC '. On considère respectivement les points P, Q et R centres de gravités respectifs des triangles B CA ', ACB ' et ABC '. On note a, b, c, a ', b ', c ', p, q et r les affixes respectives des points A, B, C, A ', B ', C ', P,Qet R. 1° a. Traduire, avec les affixes des points concernés, que C ' est l'image de A dans une rotation d'angle de mesure dont on précisera le centre.

BAC' est un triangle équilatéral direct donc $\begin{cases} CA' = CB \\ (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA'}) = +\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

A' est donc l'image de B par la rotation de centre C d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et on a : $a' - c = e^{i\pi/3}(b - c)$

b) Montrer que a ' + b ' + c ' = a + b + c.

On a ; $\left.\begin{array}{l} a' - c = e^{i\pi/3}(b - c) \\ b' - a = e^{i\pi/3}(c - a) \\ c' - b = e^{i\pi/3}(a - b) \end{array}\right\}$ donc $a' - c + b' - a + c' - b = e^{i\pi/3}(b - c + c - a + a - b) = 0$

On a bien $a' + b' + c' = a + b + c$.

2° En déduire que p + q + r = a + b + c.

$p = \dfrac{b + c + a'}{3}$, $q = \dfrac{a + c + b'}{3}$ et $r = \dfrac{a + b + c'}{3}$ donc $p + q + r = \dfrac{b + c + a'}{3} + \dfrac{a + c + b'}{3} + \dfrac{a + b + c'}{3}$

$= \dfrac{2a + 2b + 2c + a' + b' + c'}{3} = \dfrac{2a + 2b + 2c + a + b + c}{3} = a + b + c.$

3° En déduire que les triangles ABC, A 'B 'C ' et PQR ont même centre de gravité.

Le centre de gravité de ABC a pour affixe : $\dfrac{a + b + c}{3}$

Le centre de gravité de A'B'C' a pour affixe : $\dfrac{a' + b' + c'}{3}$

Le centre de gravité de PQR a pour affixe : $\dfrac{p + q + r}{3}$

Commea $a + b + c = a' + b' + c' = p + q + r$ ils ont bien le même affixe et sont donc confondus.

4° Montrer que : 3 (q − p) = (b ' − c)+ (c − a ')+(a − b). On admettra que, demême : 3 (r −p) = (a − c)+(b − a ') + (c ' − b).

$3(q - p) = 3\,\dfrac{a + c + b'}{3} - 3\,\dfrac{b + c + a'}{3} = a + c + b' - b - c - a' = a + b' - b - a'$

$(b' - c) + (c - a') + (a - b) = b' - c + c - a' + a - b = a + b' - b - a' = 3(q - p)$

5° Justifier les égalités suivantes : $a - c = e^{i\pi/3}(b' - c)$; $b - a' = e^{i\pi/3}(c - a')$; $c' - b = e^{i\pi/3}(a - b)$.

ACB' est un triangle équilatéral direct donc $\begin{cases} CB' = CA \\ (\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{CZ}) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

A est donc l'image de B' par la rotation de centre C d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

CBA' est est un triangle équilatéral direct donc $\begin{cases} CA' = BA' \\ (\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{BA'}) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

B est donc l'image de C par la rotation de centre A' d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

BAC' est est un triangle équilatéral direct donc $\begin{cases} BC' = BA \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'}) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

C' est donc l'image de A par la rotation de centre B d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

6° Déduire des questions 4° et 5° que le triangle PQR est équilatéral.

$3(q - p) = (a - c) + (b - a') + (c' - b) = e^{i\pi/3}(b' - c) + e^{i\pi/3}(c - a') + e^{i\pi/3}(a - b) = e^{i\pi/3}(b' - c + c - a' + a - b)$

$= e^{i\pi/3}((a - c) + (b - a') + (c' - b)) = e^{i\pi/3} \times 3(r - p)$ donc $r - p = e^{i\pi/3}(r - p)$

R est donc l'image du point Q dans la rotation de centre P d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et donc PQR est un triangle équilatéral.