Asie juin 2005 Complexe 5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue *z* suivante :

$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$.

I. Résolution de l'équation (E).

1° Montrer que $-i$ est solution de (E).

2° Déterminer les nombres réels a, b, c tels que :

$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c)$.

3° Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4 + i$, $4 - i$, $-i$.

1° Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2° Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Calculer l'affixe de S.

3° Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathscr{C}$.

4° A tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$

a) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.

b) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathscr{C}'$ de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer $\mathscr{C}'$.

c) Pour tout nombre complexe $z' = 2$, exprimer $|z' - i|$ en fonction de z.

d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathscr{C}$. Démontrer que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.

e) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathscr{C}$.

CORRECTION

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm). On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue *z* suivante :$z^3 + (-8 + i) z^2 + (17 - 8 i) z + 17 i = 0$.

I. Résolution de l'équation (E). 1° Montrer que $-i$ est solution de (E).

$(-i)^3 + (-8 + i)(-i)^2 + (17 - 8 i)(-i) + 17 i = i + 8 - i - 17 i - 8 + 17 i = 0$

2° Déterminer les nombres réels a, b, c tels que : $z^3 + (-8 + i) z^2 + (17 - 8 i) z + 17 i = (z + i)(a z^2 + b z + c)$.

Par identification que peut voir que $z^3 = a z^3$ et $17 i = i c$ donc $a = 1$ et $c = 17$

$z^3 + (-8 + i) z^2 + (17 - 8 i) z + 17 i = (z + i)(z^2 + b z + 17)$

$\Leftrightarrow z^3 + (-8 + i) z^2 + (17 - 8 i) z + 17 i = z^3 + b z^2 + 17 z + i z^2 + i b z + 17 i$

On a donc $-8 + i = b + i$ et $17 - 8 i = 17 + i b$ c'est à dire $b = -8$.

$z^3 + (-8 + i) z^2 + (17 - 8 i) z + 17 i = (z + i)(z^2 - 8 z + 17)$

3° Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

$z^3 + (-8 + i) z^2 + (17 - 8 i) z + 17 i = 0 \Leftrightarrow z + i = 0$ ou $z^2 - 8 z + 17 = 0$

Résolution de $z^2 - 8 z + 17 = 0$:

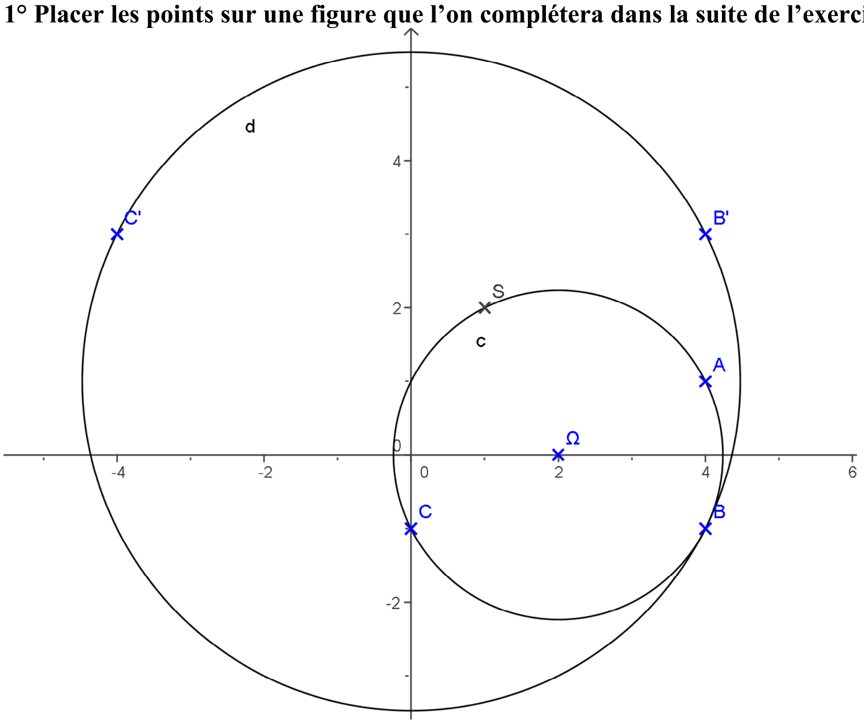
$\Delta = 8^2 - 4 \times 17 = -4 = (2 i)^2$. les solutions sont donc $z_1 = \dfrac{8 + 2 i}{2} = 4 + i$ et $z_2 = 4 - i$

On a d onc : $z^3 + (-8 + i) z^2 + (17 - 8 i) z + 17 i = 0 \Leftrightarrow z = -i$ ou $z = 4 + i$ ou $z = 4 - i$

L'ensemble des solutions S est donc : $S = \{-i, 4 + i, 4 - i\}$

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4 + i$, $4 - i$, $-i$.

1° Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.



2° Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Calculer l'affixe de S.

On sait que l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est :

$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$

Donc l'écriture complexe de r est : $z' - 2 = e^{i\pi/2} (z - 2)$ c'est à dire $z' = 2 + i (z - 2) + 2$.

On a donc $z_S = (4 + i - 2) i + 2 = 2 i - 1 + 2 = 1 + 2 i$.

3° Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathscr{C}$.

On sait que ΩA = ΩB donc Ω est sur la médiatrice de [SA].

$x_\Omega = 0$ donc Ω est sur la médiatrice de [AB]. le centre du cercle circonscrit à ABC est donc le point Ω

$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |4 + i - 2| = \sqrt{5} = \Omega S = \Omega B$ et $\Omega C = |-i - 2| = \sqrt{5}$

$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre Ω de rayon $\sqrt{5}$

4° A tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M ' d'affixe $z' = \dfrac{i z + 10 - 2 i}{z - 2}$

a) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.

$$z_{A'} = \frac{i (4 + i) + 10 - 2 i}{4 + i - 2} = \frac{4 i - 1 + 10 - 2 i}{2 + i} = \frac{(9 + 2 i) (2 - i)}{2^2 + 1^2} = \frac{18 - 9 i + 4 i + 2}{5} = 4 - i.$$

$$z_B' = \frac{i (4 - i) + 10 - 2 i}{4 - i - 2} = \frac{4 i + 1 + 10 - 2 i}{2 - i} = \frac{(11 + 2 i) (2 + i)}{2^2 + 1^2} = \frac{22 + 11 i + 4 i - 2}{5} = 4 + 3 i$$

$$z_{C'} = \frac{i (- i) + 10 - 2 i}{- i - 2} = \frac{1 + 10 - 2 i}{- 2 - i} = \frac{(11 - 2 i) (- 2 + i)}{2^2 + 1^2} = \frac{- 22 + 11 i + 4 i + 2}{5} = - 4 + 3 i$$

b) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathscr{C}$ ' de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer $\mathscr{C}$ '.

$PA' = | 4 - i - i | = | 4 - 2 i | = \sqrt{16 + 4} = 2 \sqrt{5}$; $PB' = | 4 + 3 i - i | = | 4 + 2 i| = 2 \sqrt{5}$;

$PC' = | - 4 + 3 i - i | = | - 4 + 2 i| = 2 \sqrt{5}$; $PC' = PA' = PB' = 2 \sqrt{5}$.

c) Pour tout nombre complexe $z' = 2$, exprimer $| z' - i |$ en fonction de z.

$$| z' - i | = \left| \frac{i z + 10 - 2 i}{z - 2} - i \right| = \left| \frac{i z + 10 - 2 i - i z + 2 i}{z - 2} \right| = \left| \frac{10}{z - 2} \right| = \frac{10}{| z - 2 |}$$

d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathscr{C}$. Démontrer que $| z' - i | = 2 \sqrt{5}$.

Si $M \in \mathscr{C}$ alors $\Omega M = \sqrt{5}$ c'est à dire $| z - 2 | = \sqrt{5} \neq 0$.

On sait que : $| z' - i | = \dfrac{10}{| z - 2 |}$. On peut donc dire que : $| z' - i | = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2 \sqrt{5}$.

e) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M ' associés aux points M du cercle $\mathscr{C}$.

Si $M \in \mathscr{C}$ alors $PM' = | z' - i | = 2 \sqrt{5}$ alors $M' \in \mathscr{C}'$