France septembre 1999.

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On note Z_M l'affixe du point M.

Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe 4 i.

1° Soit θ un réel de $[\,0\,,\,2\,\pi[$ et r un réel strictement positif.

On considère le point E d'affixe $re^{i\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant

$$(\overrightarrow{OE},\ \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{2}.$$

Quelle est, en fonction de r et θ, l'affixe de F ?

2° Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice.

On choisira, uniquement pour cette figure : $\theta = \dfrac{5\,\pi}{6}$ et $r = 3$

3° On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments [AB], [BE], [EF], [FA].

a) Prouver que PQRS est un parallélogramme

b) On pose : $Z = \dfrac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}$.

Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que PQRS est un carré.

c) Calculer, en fonction de r et θ, les affixes respectives des points P et Q.

d) Quelle est, en fonction de r et θ, l'aire du carré PQRS ?

r étant fixé, pour quelle valeur de θcette aire est-elle maximale ? Quelle est alors l'affixe de E ?

CORRECTION

France septembre 1999.

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). On note Z_M l'affixe du point M.

Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe 4 i. 1° Soit θ un réel de $[0,\ 2\pi[$ et r un réel strictement positif.

On considère le point E d'affixe $re^{i\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant $(\overrightarrow{OE},\ \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{2}$.

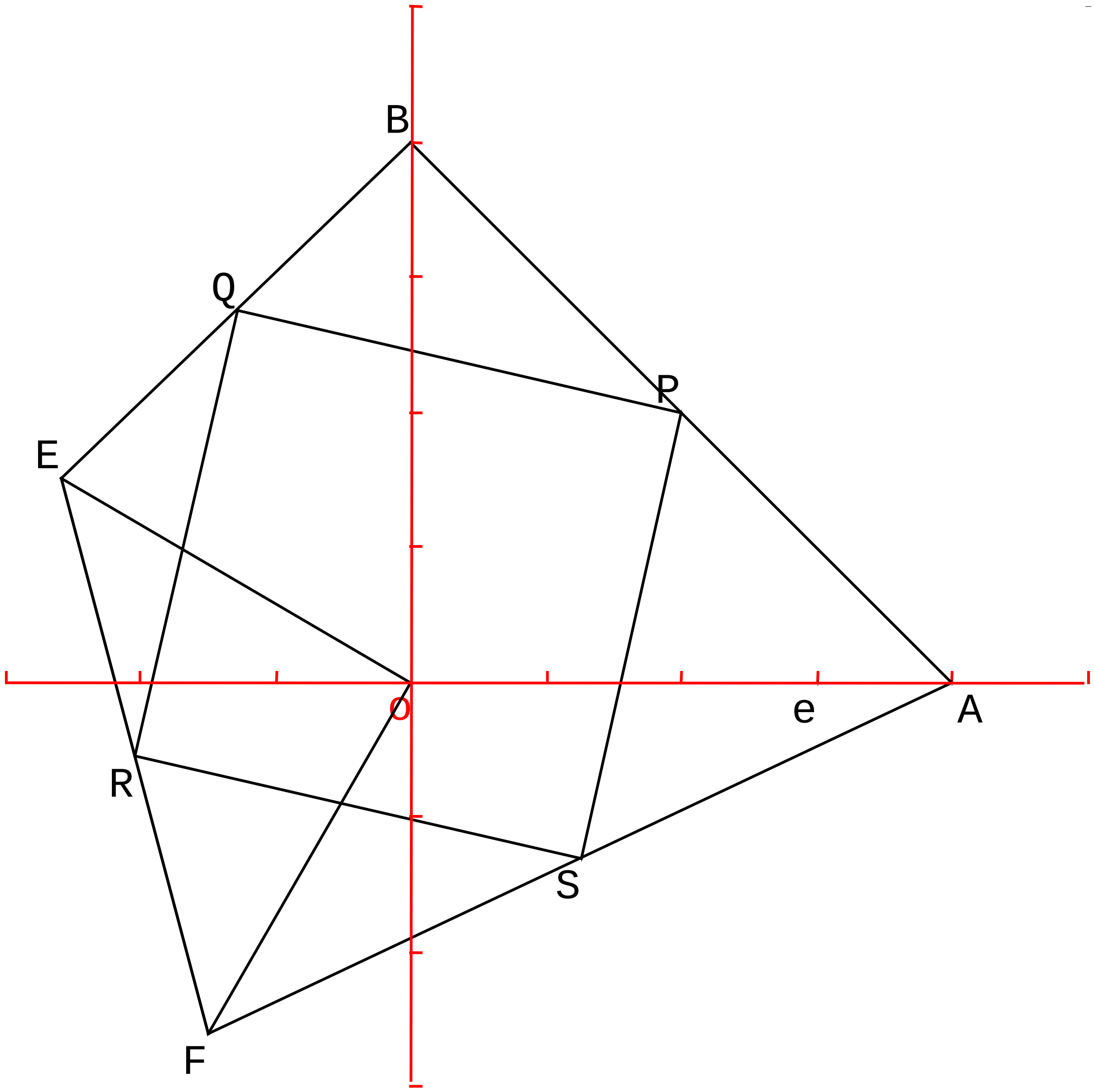
Quelle est, en fonction de r et θ, l'affixe de F ?

F est l'image de E par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On sait que l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'angle θ est : $z' - z_\Omega = e^{i\theta}\ (z - z_\Omega)$.

On a donc : $x_F - 0 = e^{i\pi/2}\ (z_E - 0) \Leftrightarrow z_E = i\ z_E = r\ i\ e^{i\theta}$

2° Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice. On choisira, uniquement pour cette figure : $\theta = \frac{5\pi}{6}$ et r = 3



3° On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments [AB], [BE], [EF], [FA].

a) Prouver que PQRS est un parallélogramme

$p = \frac{a+b}{2}$ et $q = \frac{b+e}{2}$ donc l'affixe de $\overrightarrow{PQ}$ est égal à : $q - p = \frac{b+e}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{e-a}{2}$

$r = \frac{e+f}{2}$ et $s = \frac{f+a}{2}$ donc l'affixe de $\overrightarrow{SR}$ est égal à : $r - s = \frac{e+f}{2} - \frac{f+a}{2} = \frac{e-a}{2}$.

$q - p = r - s$ donc $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ donc PQRS est un parallélogramme.

Remarque : On peut démontrer ce résultat en classe de troisième ou de seconde..

Dans le triangle ABE : $\left.\begin{array}{l}\text{P est le milieu de [AB]}\\ \text{Q est le milieu de [BE]}\end{array}\right\}$ donc (PQ) // (AE) et $PQ = \dfrac{AE}{2}$. On a $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

De même dans le triangle EFA $\left.\begin{array}{l}\text{R est le milieu de [EF]}\\ \text{S est le milieu de [AF]}\end{array}\right\}$ donc $\overrightarrow{RS} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EA}$.

Ce théorème s'appelle le théorème de varignon.

b) On pose : $Z = \dfrac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}$. Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que PQRS est un carré.

$z_P = \dfrac{4+4\,i}{2} = 2 + 2\,i$; $z_Q = \dfrac{4\,i + r\,e^{i\theta}}{2}$; $z_R = \dfrac{r\,e^{i\theta} + i\,r\,e^{i\theta}}{2}$

$$\left.\begin{array}{r}z_R - z_Q = \dfrac{r\,e^{i\theta} + i\,r\,e^{i\theta}}{2} - \dfrac{4\,i + r\,e^{i\theta}}{2} = \dfrac{i\,r\,e^{i\theta} - 4\,i}{2}\\ z_Q - z_P = \dfrac{4\,i + r\,e^{i\theta}}{2} - \dfrac{4+4\,i}{2} = \dfrac{r\,e^{i\theta} - 4}{2}\end{array}\right\}\text{ donc } \dfrac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P} = \dfrac{i\,r\,e^{i\theta} - 4\,i}{r\,e^{i\theta} - 4} = i.$$

$$\left|\dfrac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\dfrac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}\right) = \dfrac{\pi}{2} \text{ donc } \dfrac{QR}{PQ} = 1 \text{ et } (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}) = \dfrac{\pi}{2}$$

donc PQ = QR et (PQ) $\perp$ (QR)

le parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur c'est donc un losange. Il a, en plus, un angle droit c'est donc un carré

c) Calculer, en fonction de r et θ, les affixes respectives des points P et Q.

$z_P = \dfrac{4+4\,i}{2}$ et $z_Q = \dfrac{4\,i + r\,e^{i\theta}}{2} = \dfrac{r\cos\theta}{2} + i\,\dfrac{r\sin\theta + 4}{2}$

d) Quelle est, en fonction de r et θ, l'aire du carré PQRS ? r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale ? Quelle est alors l'affixe de E ?

$$PQ = \left|\dfrac{r\cos\theta}{2} + i\,\dfrac{r\sin\theta + 4}{2} - \dfrac{4+4\,i}{2}\right| = \left|\dfrac{r\cos\theta - 4}{2} + i\,\dfrac{r\sin\theta}{2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{r\cos\theta - 4}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{r\sin\theta}{2}\right)^2}$$

$$\mathcal{A} = PQ^2 = \dfrac{r^2\cos^2\theta - 8\,r\cos\theta + 16}{4} + \dfrac{r^2\sin^2\theta}{4} = \dfrac{r^2 - 8\,r\cos\theta + 16}{4}$$

Soi f la fonction définie sur $[\,0\,,\,2\,\pi\,[$ par $f(\theta) = \dfrac{r^2 - 8\,r\cos\theta + 16}{4}$. On a $f'(\theta) = 8\,r\sin\theta$.

$f'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta < \pi$. f est maximale pour $\theta = \pi$ et on a alors $\mathcal{A} = \dfrac{-r^2 + 8\,r + 16}{4}$ et $z_E = -\,r$.