LIBAN JUIN 2004

Le plan complexe est rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.
1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$(z - 2\,i)\, z^2 - 2\,z + 2) = 0$.
Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier les réponses).
2° Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = 2\,i$.
A tout complexe z différent de A on associe le complexe
$z' = \dfrac{z - 2\,i}{z - 1 - i}$
a) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur. Montrer que $B \in (E)$.
Déterminer et construire l'ensemble (E).
b) Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|\,z'\,| = 1$.
Déterminer et construire (F).
3° Soit R la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Calculer l'affixe du point B' , image de B par R et l'affixe du point I', image par R du point $I\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

b) Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

CORRECTION

1° $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$ si et seulement si $z = 2i$ ou $z^2-2z+2=0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times 2 = -4$ les racines de z^2-2z+2 sont donc : $\dfrac{2+2i}{2}$ et $\dfrac{2-2i}{2}$

$z^2-2z+2=0$ si et seulement si $z = 1+i$ ou $z = 1-i$.

D'où les solutions de l'équations : $z_1 = 2i$ $z_2 = 1+i$ et $z_3 = 1-i$

$z_1 = 2e^{i\pi/2}$ $z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$ et $z_3 = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$

2° a) $z_B = 2i$ donc $z_B' = \dfrac{2i-2i}{2i-1-i} = 0$

L'affixe de l'image B' de B est 0, donc $B' \in (E)$

On suppose $M \neq A$.

$M \in E$ si et seulement si $z' \in i\,\mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{z-2i}{z-1-i} \in i\,\mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{z-z_B}{z-z_A} \in i\,\mathbb{R}$

si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ si et seulement si $(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{BM}) = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$

E est donc le cercle de diamètre [AB] privé de A

b) $|z'| = 1$ si et seulement si $|z-2i| = |z-1-i|$ et $z \neq 1+i$ si et seulement si $|z-z_A| = |z-z_B|$ si et seulement si $MA = MB$ (F) est donc la médiatrice du segment [AB]

Variante plus "calculatoire".

$$\frac{z-2i}{z-1-i} = \frac{x+iy-2i}{x+iy-1-i} = \frac{(x+iy-2i)(x-1-iy+i)}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-x-ixy+ix+ixy-iy+y^2-y-2ix+2i-2y+2}{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{x^2-x+y^2-3y+2}{(x-1)^2+(y-1)^2} + \frac{-x-y+2}{(x-1)^2+(y-1)^2}\,i$$

(E) est le cercle d'équation "$x^2-x+y^2-3y+2=0$" privé de A.

(F) est la droite d'équation "$-x-y+2=0$"

3° R rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) L'écriture complexe de R est : $z' - z_\Omega = e^{i\pi/2}(z - z_\Omega)$ c'est à dire $z' = iz - i\left(\dfrac{3}{2} + i\dfrac{5}{2}\right) + \dfrac{3}{2} + i\dfrac{5}{2}$

$z' = iz - \dfrac{3i}{2} + \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{5i}{2} = iz + 4 + i$.

$z_B' = i\times 2i + 4 + i = 2 + i$. D'où l'affixe de R(B) est $2+i$.

L'affixe de R(I) est : $z_I' = i\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3i}{2}\right) + 4 + i = \dfrac{i}{2} - \dfrac{3}{2} + 4 + i = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3i}{2}$

b) (E) est le cercle de diamètre [AB] privé de A

$\dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{1+i+2i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3i}{2} = z_I$. I est le centre du cercle (E)

L'image de (E) par R est le cercle de centre I' qui passe par B' privé de R(A).

$z_A' = i(1+i) + 4 + i = i - 1 + 4 + i = 3 + 2i$.

$|z_A - z_B| = |1 + i - 2i| = \sqrt{2}$. L'image de (E) par R est le cercle de centre I' de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(F) est la médiatrice de [AB] donc l'image de (F) par R est la médiatrice de [A' B']