Liban juin 2005 Exercice 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 0,5cm.

On note j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1° Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.

2° On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'

a) Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.

Montrer que $b' = 16\,e^{-i\pi/3}$.

b) En déduire que O est un point de la droite (BB').

On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$

c) Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

3° On se propose désormais de montrer que la distance MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

a) Calculer la distance OA + OB + OC.

b) Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

c) On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.

On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22$.

d) On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :

$$|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|.$$

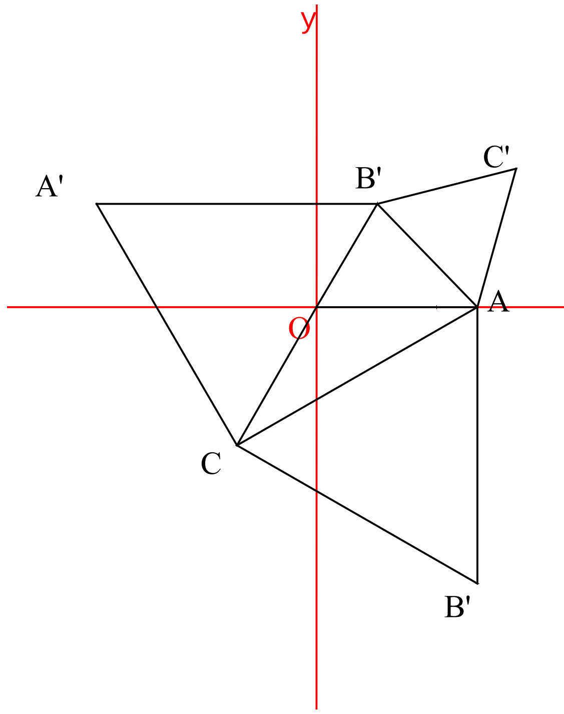
Montrer que MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 0,5cm.
On note j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6\,j$ et $c = 8\,j^2$.
Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1° Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.



2° On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'
a) Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.
Montrer que $b' = 16\,e^{-i\,\pi/3}$.

$a' - c = e^{i\pi/3}\,(b - c)$ donc

$$a' = 8\,j^2 + e^{i\pi/3}\,(6\,j - 8\,j^2) = 8\,e^{4i\pi/3} + e^{i\pi/3}\,(6\,e^{2i\pi/3} - 8\,e^{4i\pi/3})$$

$$= 8\,e^{4i\pi/3} + 6\,e^{3i\pi/3} - 8\,e^{5i\pi/3} = 8\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6 - 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -4 - 4\,i\sqrt{3} - 6 - 4 + 4\,i\sqrt{3} = -14.$$

$b' - a = e^{i\pi/3}\,(c - a)$ donc $b = 8 + e^{i\pi/3}\,(8\,e^{4i\pi/3} - 8)$

$$= 8 + 8\,e^{5i\pi/3} - 8\,e^{i\pi/3} = 8 + 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 8 + 4 - 4\,i\sqrt{3} - 4 - 4\,i\sqrt{3} = 8 - 8\,i\sqrt{3} = 16\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16\,e^{-i\,\pi/3}$$

b) En déduire que O est un point de la droite (BB').

$$(\overrightarrow{OB}\,,\,\overrightarrow{OB'}) = (\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OB'}) - (\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OB}) = \arg b' - \arg b + 2\,k\,\pi = \arg\left(\frac{b'}{b}\right)$$

$$\arg\frac{16\,e^{-i\,\pi/3}}{6\,e^{2i\pi/3}} + 2\,k\,\pi = \arg\left(\frac{8}{3}\,e^{-3i\,\pi/33}\right) + 2\,k\,\pi = \arg\left(-\frac{8}{3}\right) = \pi + 2\,k\,\pi$$

O, B et B ' sont donc alignés.

On admet que $c' = 7 + 7\,i\sqrt{3}$ c) Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

$$(\overrightarrow{OA}\,,\,\overrightarrow{OA'}) = \arg\left(\frac{a'}{a}\right) + 2\,k\,\pi = \arg\left(\frac{-14}{8}\right) + 2\,k\,\pi = \pi + 2\,k\,\pi \text{ donc } O \in (AA')$$

$$c' = 7 + 7\,i\sqrt{3} = 14\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 14\,e^{i\pi/3}$$

$$(\overrightarrow{OC}\,,\,\overrightarrow{OC'}) = \arg\left(\frac{c'}{c}\right) + 2\,k\,\pi = \arg\left(\frac{14\,e^{i\pi/3}}{8\,e^{4i\pi/3}}\right) + 2\,k\,\pi = \arg\left(\frac{7}{4}\,e^{-3\,i\,\pi/3}\right) + 2\,k\,\pi = \pi + 2\,k\,\pi \text{ donc } O \in (CC').$$

3° On se propose désormais de montrer que la distance MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.
a) Calculer la distance OA + OB + OC.

° $OA + OB + OC = |\,a\,| + |\,b\,| + |\,c\,| = 8 + 6 + 8 = 22.$

b) Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
$|\,(a - z) + (b - z)\,j^2 + (c - z)\,j\,| = |\,a + b\,j^2 + c\,j\,| = 22$.

$$j^3 = (e^{2i\pi/3})^3 = e^{2i\pi} = 1.\ 1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0.$$

c) On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe. On rappelle que $a = 8$, $b = 6\,j$ et $c = 8\,j^2$.
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$|\,(a - z) + (b - z)\,j^2 + (c - z)\,j\,| = |\,a - z + b\,j^2 - z\,j^2 + c\,j - z\,j\,| = \ = |a + b\,j + c\,j^2 + z\,(1 + j + j^2)\,|$
$= |\,a + b\,j^2 + c\,j\,| = |\,8 + 6\,j \times j^2 + 8\,j^2 \times j\,| = |\,8 + 6 + 8\,| = 22.$

d) On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' : $|\,z + z' + z''\,| \le |\,z\,| + |\,z'\,| + |\,z''\,|$.
Montrer que MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

$MA + MB + MC = |\,z - a\,| + |\,z - b\,| + |\,z - c\,| = |\,z - a\,| + |\,(z - b)\,j\,| + |\,(z - c)\,j^2\,|$ car j et j^2 sont de module 1.
$|\,z - a\,| + |\,(z - b)\,j\,| + |\,(z - c)\,j^2\,| \ge |\,z - a + (z - b)\,j + (z - c)\,j^2\,|$ et $|\,z - a + (z - b)\,j + (z - c)\,j^2\,| = 22$
Donc : $MA + MB + MC \le 22$.