Liban mai 2006 EXERCICE 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1° a) Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport ,$\sqrt{2}$.

b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Placer les points A, B et B'.

2° On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'tel que : $z' = (1 + i)\, z + 1$.

a) Montrer que B a pour image B' par f .

b) Montrer que A est le seul point invariant par f .

c) Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\frac{z' - z}{i - z} = - i$.

Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.

En déduire une méthode de construction de M' à partir de M, pour M distinct de A.

3° a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|\, z - 2\, | = \sqrt{2}$.

b) Démontrer que $z' - 3 - 2\, i = (1 + i)\, (z - 2)$.

En déduire que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.

c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

CORRECTION

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). On prendra 2 cm pour unité graphique. Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1° a) Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

Soit z_1 l'affixe du point B_1. On sait que : $z_1 - z_A = \sqrt{2}\,(z_B - z_A)$

$z_1 - i = \sqrt{2}\,(2 - i) \Leftrightarrow z_1 = i + 2\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + i\,(1 - \sqrt{2})$

b) Déterminer l'affixe du point B ' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Placer les points A, B et B '.

$z_{B'} - z_A = e^{i\pi/4}\,(z_1 - z_A)$ donc $z_{B'} = i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2\sqrt{2} + i\,(1 - \sqrt{2}) - i) = i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (2\sqrt{2} - i\sqrt{2}) =$

$i + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = i + 2 - i + 2\,i + 1 = 3 + 2\,i$

2° On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'tel que : z ' = (1 + i) z + 1. a) Montrer que B a pour image B ' par f .

$z_B' = (1 + i) \times 2 + 1 = 2 + 2\,i + 1 = 3 + 2\,i = z_{B'}$

b) Montrer que A est le seul point invariant par f .

$z' = z \Leftrightarrow (1 + i)\,z + 1 = z \Leftrightarrow i\,z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{i} \Leftrightarrow z = i.$

c) Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\frac{z' - z}{i - z} = -i$. Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles. En déduire une méthode de construction de M ' à partir de M, pour M distinct de A.

$\frac{z' - z}{i - z} = \frac{(1 + i)\,z + 1 - z}{i - z} = \frac{i\,z + 1}{i - z} = \frac{i\,(i\,z + 1)}{i\,(i - z)} = i\,\frac{i\,z + 1}{-1 - i\,z} = -i$

3° a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$

$|\,z - 2\,| = BM$ donc $|\,z - 2\,| = \sqrt{2} \Leftrightarrow BM = \sqrt{2}$

Σ_1 est donc le cercle de centre B de rayon $\sqrt{2}$.

b) Démontrer que z ' – 3 – 2 i = (1 + i) (z – 2). En déduire que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M ' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.

$z' - 3 - 2\,i = (1 + i)\,z + 1 - 3 - 2\,i = z + i\,z + 1 - 3 - 2\,i = z\,(1 + i) - 2 - 2\,i = (1 + i)\,(z - 2).$

$|\,z - 2\,| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |\,1 + i\,| \times |\,z - 2\,| = |\,1 + i\,|\sqrt{2} \Leftrightarrow |\,z' - 3 - 2\,i\,| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \Leftrightarrow |\,z' - 3 - 2\,i\,| = 2.$

Σ_2 est donc le cercle de centre B ', point d'affixe 3 + 2 i, de rayon 2.

c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B '.