Antilles–Guyane septembre 2000

1° Pour tout nombre complexe z, on considère $f(z) = z^4 - 10 z^3 + 38 z^2 - 90 z + 261$.

a) Soit b un nombre réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(i b)$.

En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

b) Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta).$$

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $f(z) = 0$.

2° Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal.

a) Placer dans le plan P les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixes : $a = 3i$, $b = -3i$, $c = 5 + 2i$ et $d = 5 - 2i$.

b) Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C, D.

c) Déterminer l'ensemble E des points M de P tels que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 10$.

Tracer E sur la figure précédente.

CORRECTION

1° Pour tout nombre complexe z, on considère $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$.
a) Soit b un nombre réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de f (i b).
En déduire que l'équation f (z) = 0 admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

$f(ib) = (ib)^4 - 10(ib)^3 + 38(ib)^2 - 90(ib) + 261 = b^4 + 10ib^3 - 38b^2 - 90ib + 261$
$= b^4 - 38b^2 + 261 + i(10b^3 - 90b)$

$f(bi) = 0 \Leftrightarrow b^4 - 38b^2 + 261 + i(10b^3 - 90b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 38b^2 + 261 = 0 \\ 10b^3 - 90b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 0^4 - 38 \times 0^2 + 261 = 0 \end{cases}$ ou

$\begin{cases} b^2 = 9 \\ b^4 - 38b^2 + 261 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ 3^4 - 38 \times 3^2 + 261 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} b = -3 \\ (-3)^4 - 38 \times (-3)^2 + 261 \end{cases} \Leftrightarrow b = 3$ ou $b = -3$.

L'équation f(z) = 0 admet deux solutions imaginaires pures : 3 i et – 3 i.

b) Montrer qu'il existe deux réels α, β, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z, $f(z)=(z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta)$.

f(z) = 0 admet deux solutions imaginaires pures : 3 i et – 3 i donc f(z) est divisible par $(z - 3i)(z + 3i) = z^2 + 9$

$z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261 = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$

$\Leftrightarrow z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261 = z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + 9z^2 + 9\alpha z + 9z + 9\beta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ -10 = \alpha \\ 38 = \beta + 9 \\ -90 = 9\alpha + 9 \\ 261 = 9\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -10 \\ \beta = 38 - 9 \\ 9 - 90 = 9 \times (-10) \\ \beta = \dfrac{261}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -10 \\ \beta = 29 \end{cases} :$$

$z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261 = (z^2 + 9)(z^2 - 10z + 29)$

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : f (z) = 0.

$f(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 9 = 0$ ou $z^2 - 10z + 29 = 0$.

Résolution de $z^2 - 10z + 29 = 0$.

$\Delta = 10^2 - 4 \times 29 = -16 = (4i)^2$ les solutions sont donc : $z_1 = \dfrac{10 - 4i}{2} = 5 - 2i$ et $z_2 = 5 + 2i$.

Résolution de $z^2 + 9 = 0$.

$z^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -9 \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z = -3i$.

$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z = -3i$ ou $z = 5 - 2i$ ou $z = 5 + 2i$. $S = \{3i, -3i, 5 + 2i, 5 - 2i\}$

2° Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal. a) Placer dans le plan P les points A, B, C et D ayant pour affixes : a = 3i, b = −3i, c = 5+2i et d = 5−2i. b) Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C, D.

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} = \frac{3i - 3i + 5 + 2i + 5 - 2i}{4} = \frac{5}{2}$$

c) Déterminer l'ensemble E des points M de P tels que : $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \| = 10$. Tracer E sur la figure précédente.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\,\overrightarrow{MG}$

$M \in E \Leftrightarrow \| 4\,\overrightarrow{MG} \| = 10 \Leftrightarrow MG = \dfrac{5}{2}$.

E est le cercle de centre G de rayon $\dfrac{5}{2}$