Baccalauréat S Antilles – Guyane juin 2005 $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.
Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe −1.
Soit F l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans P qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point M′ = F(M) d'affixe $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$

1° a) Soit E le point d'affixe $e^{i\pi/3}$, on appelle E′ son image par F.
Déterminer l'affixe de E′ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
b) On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.
sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du a).
1° a) Soit E le point d'affixe $e^{i\pi/3}$, on appelle E′ son image par F.
Déterminer l'affixe de E′ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
b) On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.
2° a) Soit K le point d'affixe 2 $e^{i\pi/6}$ et K′ l'image de K par F.
Calculer l'affixe de K′.
b) Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application F.
3° On désigne par R un point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in \,]-\pi\,,\,\pi[$.
R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.
a) Montrer que $z' + 1 = \dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z}}$
En déduire que : $|\,z' + 1\,| = |\,z'\,|$.
b) Si on considère maintenant les points d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in \,]-\pi\,,\,\pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du a).

CORRECTION

Baccalauréat S Antilles – Guyane juin 2005 $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.
Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe −1.
Soit F l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans P qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point M′ = F(M) d'affixe $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$

1° a) Soit E le point d'affixe $e^{i\pi/3}$, on appelle E′ son image par F.
Déterminer l'affixe de E′ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

$$z' = -\frac{1}{\overline{z}} = -\frac{1}{e^{-i\pi/3}} = -e^{i\pi/3} = -e^{i\pi/3-\pi} = e^{-2i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.

Si M ∈ $\mathscr{C}_1$ il existe un réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que , $z = e^{i\theta}$.

On a alors : $z' = -\dfrac{1}{e^{-i\theta}} = -e^{i\theta} = e^{i\theta+\pi}$ donc M ' ∈ $\mathscr{C}_1$

Réciproquement si M ' ∈ $\mathscr{C}_1$ alors il existe $\theta \in]\pi, \pi]$ tel que : $z_{M'} = e^{i\theta}$.
On a alors M ' = f(M) avec $z_M = e^{i\theta+\pi}$ donc M ' est l'image par f d'un point de $\mathscr{C}_1$.
L'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F est donc $\mathscr{C}_1$.

2° a) Soit K le point d'affixe 2 $e^{i\pi/6}$ et K′ l'image de K par F. Calculer l'affixe de K′.

$$z' = -\frac{1}{2\,e^{-i\pi/6}} = -\frac{1}{2}e^{i\pi/6} = \frac{1}{2}e^{i\pi/6-\pi} = \frac{1}{2}e^{-5i\pi/6} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$$

b) Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application F.

M ∈ $\mathscr{C}_2 \Leftrightarrow \exists\, \theta \in]\pi, \pi] / z = 2\,e^{i\theta}$

On a alors : $z' = -\dfrac{1}{2\,e^{-i\theta}} = -\dfrac{1}{2}e^{i\theta} = \dfrac{1}{2}e^{i\theta-\pi}$. on a donc M ' ∈ $\mathscr{C}\left(O, \dfrac{1}{2}\right)$

Réciproquement si M ' ∈ $\mathscr{C}\left(O, \dfrac{1}{2}\right)$ il existe un réel θ tel que $z_{M'} = \dfrac{1}{2}e^{i\theta}$

On a alors M ' = f(M) avec $z_M = 2\,e^{i\theta+\pi}$ donc M ' est l'image par f d'un point de $\mathscr{C}\left(O, \dfrac{1}{2}\right)$.

L'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F est donc $\mathscr{C}\left(O, \dfrac{1}{2}\right)$.

3° On désigne par R un point d'affixe 1 + $e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$. R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1. a) Montrer que $z' + 1 = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$ En déduire que : | z′ + 1 | = | z′ |.

$z' + 1 = -\dfrac{1}{\overline{z}} + 1 = \dfrac{-1+\overline{z}}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$ On a : $|z'+1| = \left|\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}\right|$ donc $|z'+1| = = \dfrac{|\overline{z}-1|}{|\overline{z}|}$.

Comme $z = 1 + e^{i\theta}$ on a $|\overline{z} - 1| = |1 + e^{-i\theta} - 1| = |e^{-i\theta}| = 1$ on a donc $|z'+1| = = \dfrac{1}{|\overline{z}|} = |z'|$.

b) Si on considère maintenant les points d'affixe 1 + $e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du a).

Si $z = 1 + e^{i\theta}$ alors $|z'+1| = |z'|$ alors BM' = OM ' alors M ' est sur la médiatrice de [BO].
Réciproquement (hors sujet)

Si M ' est sur la médiatrice de [BO] alors $|z'+1| = |z'|$ alors $\left|\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}\right| = \left|-\dfrac{1}{\overline{z}}\right|$ alors $\dfrac{|\overline{z}-1|}{|\overline{z}|} = \dfrac{1}{|\overline{z}|}$

alors $|\overline{z} - 1| = 1$ alors le point d'affixe $\overline{z}$ est sur le cercle $\mathscr{C}_3$.
Il existe un réel θ tel que $\overline{z} = 1 + e^{i\theta}$ donc $z = 1 + e^{-i\theta}$ donc M appartient à $\mathscr{C}_3$
L'image de $\mathscr{C}_3$ est la médiatrice de [BO]