Asie 2002 5 points

1° Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormak direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 3, $4i$, $-2+3$ iet $1-i$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le plan.

b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

2° On considère dans l'ensemble des complexes les équations :

$$z^2 - (1 + 3\,i)\,z - 6 + 9\,i = 0 \qquad (1)$$

$$\text{et} \quad z^2 - (1 + 3\,i)\,z + 4 + 4\,i = 0 \qquad (2)$$

a) Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1 et l'équation (2) une solution imaginaire pure z_2.

b) Développer $(z-3)(z+2-3\,i)$, puis $(z-4\,i)(z-1+i)$

c) En déduire les solutions de l'équation :

$$(z^2 - (1 + 3\,i)\,z - 6 + 9\,i)\,(z^2 - (1 + 3\,i)\,z + 4 + 4\,i) = 0$$

d) Soit z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative.

Donner la forme trigonométrique de z_0

e) Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n d'affixes z_0^n soient sur la droite d'équation $y = x$

3° On appelle f l'application qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - (1 + 3\,i)\,z - 6 + 9\,i\,.$$

a) On pose $z = x + i\,y$ et $z' = x' + y'\,i$. Exprimer x' et y' en fonction de xet y.

b) Déterminer une équation de l'ensemble (H) des points M pour lesquels f(M) appartient à l'axe des ordonnées.

CORRECTION

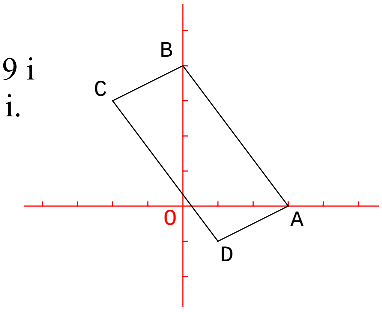
1° $z_B - z_A = 4i - 3 = z_C - z_D$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD parallélogramme

2° a) $z_1 = x$. $x^2 - (1+3i)x - 6 + 9i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ -3x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 3^2 - 3 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$ $z_1 = 3.$

$z_2 = I y$. $(iy)^2 - (1+3i)(iy) + 4 + 4i = 0 \Leftrightarrow -y^2 - iy + 3y + 4 + 4i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + 3y + 4 = 0 \\ -y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ -4^2 + 3 \times 4 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 4$

$z_2 = 4i.$



b) $(z-3) \times (z+2-3i) = z^2 + 2z - 3iz - 3z - 6 + 9i = z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i$

$(z-4i) \times (z-1+2i) = z^2 - z + 2iz - 4iz + 4i + 8 = z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i.$

c) $S = \{ 3 ; -2+3i ; 4i ; 1-i \}$

d) $z_0 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$.

e) $z_0^n = (\sqrt{2})^n e^{-ni\pi/4}$ $\arg(z_0^n) = -\frac{n\pi}{4}$

$z_0^n = \in$ D si et seulement si $\arg(z_0^n) = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ si et seulement si $-\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi$

si et seulement si $-\frac{n}{4} = \frac{1+4k}{4}$ si et seulement si $n = -1 - 4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$n \in \{ 3 ; 7 ; 11 ; 15 ; \dots \}$

3° a) $z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i = (x+iy)^2 - (1+3i)(x+iy) - 6 + 9i$

$= x^2 - y^2 + 2ixy - x - iy - 3ix + 3y - 6 + 9i$. On a : $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - x + 3y - 6 \\ y' = 2xy - 3x - y + 9 \end{cases}$

b) $f(M) \in (Oxy) \Leftrightarrow x' = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - x + 3y - 6 = 0.$