Asie Juin 2003

Γ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$

1° A tout point M d'affixe z, on associe le point M'd'affixe z' telle que :

$z' = z^2 - 2(1+i)z$.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b. Soit H l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel .Montrer que H est la représentation graphique d'une fonction h que l'on déterminera

(l'étude de la fonction h n'est pas demandée). H est tracée sur le graphique ci-dessous.

2° Montrer que le point A d'affixe $a = 2(1+i)$ appartient à Γ et H.

3° Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

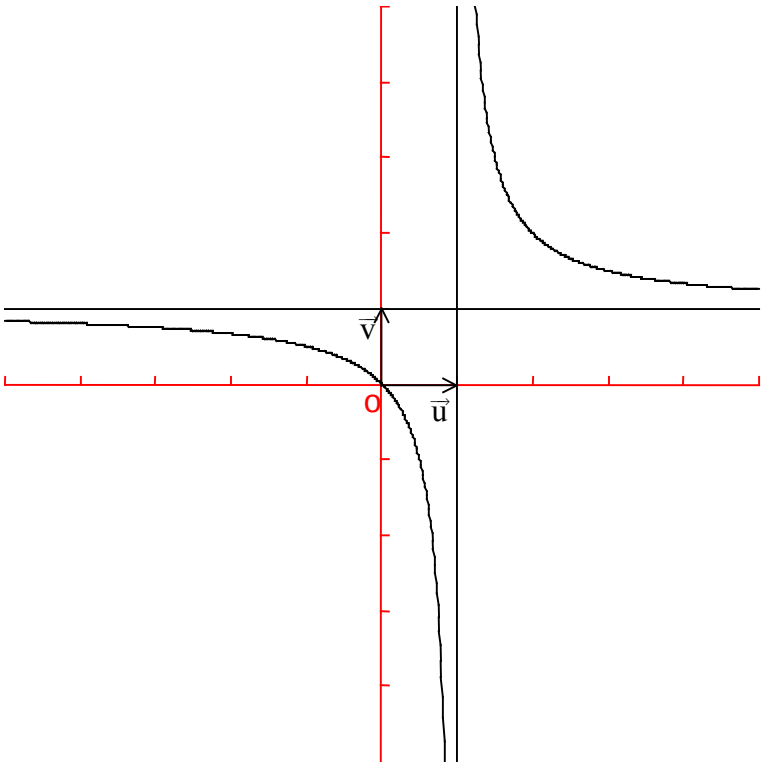
On note B et C les points tels que R(A) = B et R(C) = A.

a) Montrer que R(B) = C et que les triangles OAB, OBC et OCA sont isométriques.

b) Quelle est la nature du triangle ABC?

c) Montrer que B et C appartiennent à Γ et H.

d. Tracer Γ et placer A, B et C sur le graphique ci-dessous



CORRECTION

1° a) $z' = z^2 - 2(1+i)z = (x+iy)^2 - 2(1+i)(x+iy) = x^2 + 2ixy - y^2 - 2(x+iy+ix-y)$
$= x^2 + 2ixy - y^2 - 2x - 2iy - 2ix + 2y = (x^2 - y^2 - 2x + 2y) + i(2xy - 2y - 2x)$
$x' = x^2 - y^2 - 2x + 2y$ et $y' = 2xy - 2y - 2x$

b) $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy - 2y - 2x = 0 \Leftrightarrow y(2x-2) = 2x \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{x-1}$ ($x = 1$ ne peut pas être solution)

$h(x) = \dfrac{x}{x-1}$?

2° $a = 2(1+i)$ $|a| = 2\sqrt{1+1} = 2\sqrt{2}$, donc $A \in \Gamma$.

$a = 2 + 2i$ on a : $x = 2$ et $y = 2$.. On a : $h(2) = \dfrac{2}{2-1} = 2$ donc $A \in H$.

3° $b = e^{2i\pi/3} \times a$ et $a = e^{2i\pi/3} c$ donc $c = e^{-2i\pi/3} a$.
Soit b' l'affixe de R(B) on $a = b' = e^{2i\pi/3} \times b = e^{2i\pi/3} \times e^{2i\pi/3} \times a = e^{4i\pi/3} \times a = e^{-2i\pi/3} a. = c$

Par R on a : $\begin{cases} O \longmapsto O \\ A \longmapsto B \\ B \longmapsto C \end{cases}$ donc OAB et OBC sont isométriques.

Par R on a : $\begin{cases} O \longmapsto O \\ B \longmapsto C \\ C \longmapsto A \end{cases}$ donc OBC et OCA sont isométriques.

b) AB = BC car R conserve les longueurs. De même BC = CA. ABC est donc équilatéral.

c) $b = e^{2i\pi/3} \times 2(1+i) = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+2i) = -\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

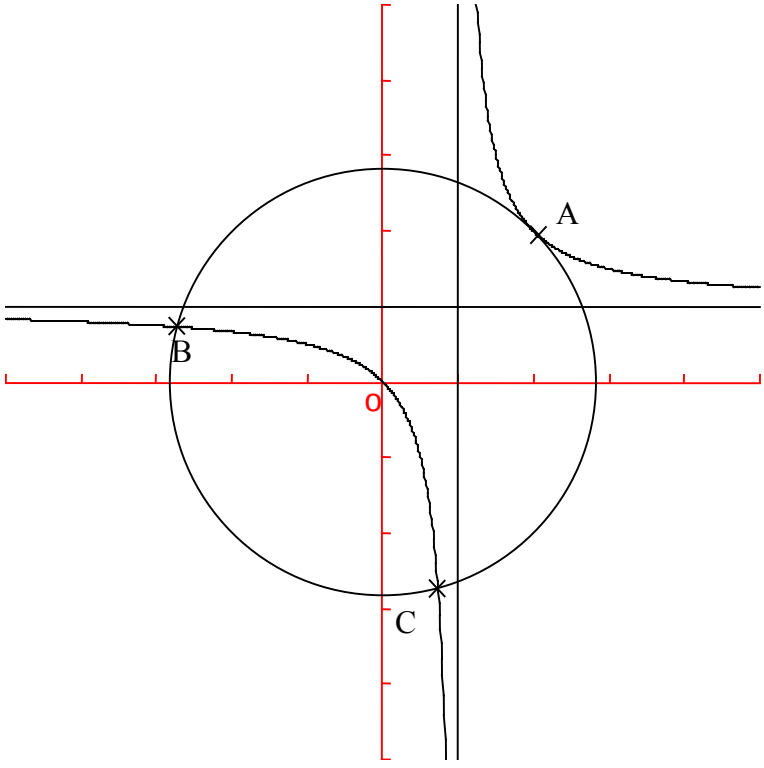
$h(x_b) = h(-\sqrt{3} - 1) = \dfrac{-\sqrt{3} - 1}{-\sqrt{3} - 1 - 1} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 2} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-2)}{3-4} = \dfrac{3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2}{-1} = \sqrt{3} - 1 = y_b$

Donc $B \in H$

$OB = \sqrt{(-\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Donc $B \in \Gamma$

et $c = e^{-2i\pi/3} \times 2(1+i) = \left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+2i) = \sqrt{3} - 1 + i(-\sqrt{3} - 1)$

$h(x_c) = h(\sqrt{3} - 1) = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1 - 1} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2)}{3-4} = \dfrac{3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2}{-1} = -\sqrt{3} - 1 = y_c$

Donc $C \in H$

$OC = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (-\sqrt{3}-1)^2} = OB = 2\sqrt{2}$. Donc $C \in \Gamma$