n° 87 p 302

Exercice 2 (5 points) National 2000

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,unité graphique 4 cm, on considère les points A d'affixe $z_A = 1$ et B d'affixe $z_B = 2$.

Soit un réel θ appartenant à l'intervalle $]\ 0\ ;\ \pi\ [$.

On note M le point d'affixe

$$z = 1 + e^{2i\theta}$$

1° Montrer que le point Mappartient au cercle C de centre A et rayon 1.

2° Exprimer l'angle $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AM})$en fonction de θ.

En déduire l'ensemble E des points M quand θ décrit l'intervalle $]\ 0\ ;\ \pi\ [$.

3° On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $-\ 2\ \theta$ et on note z ' l'affixe de M'. Montrer que $z' = \bar{z}$, puis que M' appartient à C.

4° Dans toute la suite on choisit $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\ 2\dfrac{\pi}{3}$ et A' l'image de A par r.

a) Définir l'image C' du cercle C par r.

Placer sur une figure A, B, C, M, C' puis le point M' image de M par r.

b) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

c) Montrer que C et C' se coupent en O et M'.

d) Soit le point P symétrique de M par rapport à A.

Montrer que M' est le milieu de [A' P].

CORRECTION

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,unité graphique 4 cm, on considère les points A d'affixe $z_A = 1$ et B d'affixe $z_B = 2$. Soit un réel θ appartenant à l'intervalle] 0 ; π [. On note M le point d'affixe $z = 1 + e^{2i\theta}$

1° Montrer que le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre A et rayon 1.

$AM = | z_M - z_A | = | 1 + e^{2i\theta} - 1 | = | e^{2i\theta} |$

2° Exprimer l'angle $(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AM})$en fonction de θ. En déduire l'ensemble E des points M quand θ décrit l'intervalle] 0 ; π [.

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ donc $(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ donc $(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AM}) = \arg (z_M - z_A) = \arg (e^{2i\theta}) = 2\theta$

Si θ décrit] 0 ; π] alors 2 θ décrit] 0 ; 2 π] et M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre A de rayon 1 rpivé du point d'affixe $1 + 2 e^0$ c'est à dire du point B..

3° On appelle M ' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle – 2 θ et on note z ' l'affixe de M '. Montrer que $z' = \bar{z}$, puis que M' appartient à $\mathscr{C}$.

$z' = e^{-2i\theta} z = e^{-2i\theta} (1 + e^{2i\theta}) = e^{-2i\theta} + 1= \overline{1 + e^{2i\theta}} = \bar{z}$

$AM' = | z' - 1| = | e^{-2i\theta} | = |1$ donc on a bien $M' \in C$

4° Dans toute la suite on choisit $\theta = \frac{\pi}{3}$. On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et A ' l'image de A par r.

a) Définir l'image $\mathscr{C}$ ' du cercle $\mathscr{C}$ par r. Placer sur une figure A, B, C, M, $\mathscr{C}$ ' puis le point M ' image de M par r.

A' = r(A) soit $z_{A'}$ l'affixe de A' on a : $z_{A'} = e^{-2i\pi/3} z_A = e^{-2i\pi/3}$

$\mathscr{C}$ ' est le cercle de centre A' de rayon 1.

b) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

$(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AM}) = -\frac{2\pi}{3}$ donc $(\overrightarrow{AO} , \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AO} , \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AM}) = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

De plus OA = 1 = OM.

Le triangle AOM a deux côté de même longueur et un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, il est donc est équilatéral.

c) Montrer que C et C' se coupent en O et M'.

On a vu que si $M \in \mathscr{C}$ alors $M' \in \mathscr{C}'$. On a $M \in \mathscr{C}$ donc $r(M) \in \mathscr{C}'$.

M' est à l'intersection des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$'.

d) Soit le point P symétrique de M par rapport à A. Montrer que M ' est le milieu de [A ' P].

M' est l'image de M par r donc $(\overrightarrow{OM} , \overrightarrow{OM}') = -\frac{2\pi}{3}$

$(\overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OM}') = (\overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM} , \overrightarrow{OM}') = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$.

De plus OA = OM' = 1

Le triangle AOM' a deux côté de même longueur et un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, il est donc est équilatéral.

P est le symétrique de M par rapport à O donc $(\overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AP}) = \pi$

'$(\overrightarrow{AM}' , \overrightarrow{AP}) = (\overrightarrow{AM}' , \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO} , \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AP}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}$. de plus AM' = AP

Le triangle APM' a deux côté de même longueur et un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, il est donc est équilatéral.

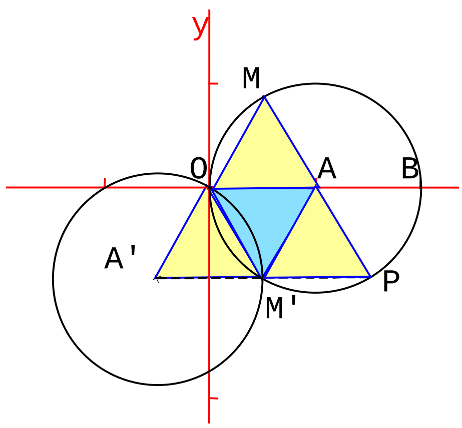
$(\overrightarrow{OA}' , \overrightarrow{OM}') = (\overrightarrow{OA}' , \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OM}') = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ de plus OA' = OM' = 1

Le triangle A'OM' a deux côté de même longueur et un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, il est donc est équilatéral.

$(\overrightarrow{M'A}' , \overrightarrow{M'P}) = (\overrightarrow{M'A}' , \overrightarrow{M'O}) + (\overrightarrow{M'O} , \overrightarrow{M'A}) + (\overrightarrow{M'A} , \overrightarrow{M'P}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\pi$

donc les points A', M' et P sont alignés

A'M' = 1 = M'P donc M' est le milieu de [A'P]



Variante calculx complexes

$z = 1 + e^{-4i\pi/3} = 1 + e^{2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$

$z' = \overline{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z'_{A'} = = e^{-2i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

$\frac{z}{z_A} = z = e^{i\pi/3}$ donc $\frac{OM}{OA} = |\, z\, | = 1$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ =arg (z) $= \frac{\pi}{3}$ …. donc AOM est équilatéral.

d) Soit le point P symétrique de M par rapport à A.
Montrer que M' est le milieu de [A' P].

A est le milieu de [MP] donc $\frac{z_P + z}{2} = z_A$

$\frac{z_P + z}{2} = z_A \Leftrightarrow z_P + e^{i\pi/3} = 2 \Leftrightarrow z_P = 2 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_P = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{z_{A'} + z_P}{2} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = z.$

Donc M est bien le milieu de [A 'P]