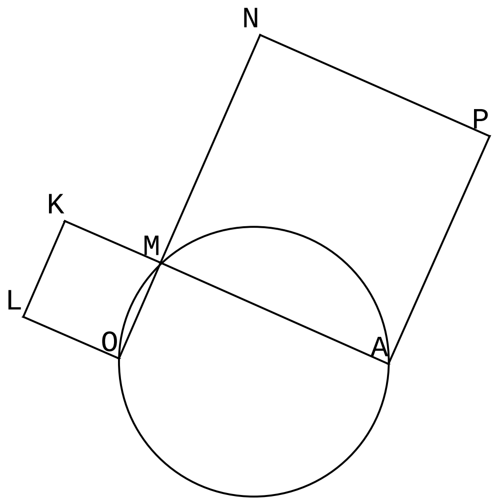
France juin 2005
EXERCICE 2 (5 points)
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



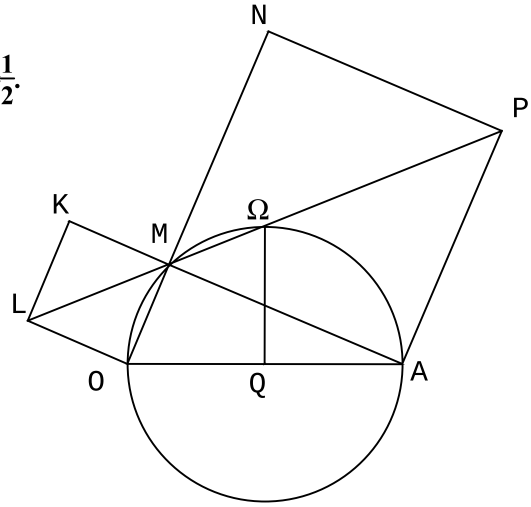
Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathscr{C}$ et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO. La figure est représentée ci-dessus.
Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.
On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.On note k, ℓ, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

1° Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle, on a $\left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$.

2° Etablir les relations suivantes : $\ell = i\,m$ et $p = -i\,m + 1 + i$. On admettra que l'on a également $n = (1 - i)\,m + i$ et $k = (1 + i)\,m$.
3° a) Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathscr{C}$.
b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.
4° a) Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.
b) Quelle est la nature du triangle Ω N K ?
5° Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 (5 points) Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathscr{C}$ et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO. La figure est représentée ci-dessus. Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer. On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ .On note k, ℓ, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.



1° Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle, on a $\left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$.

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre Q d'affixe

Le centre $\mathscr{C}$ admet comme centre le point $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

Son rayon est égale à $\frac{OA}{2} = \frac{1}{2}$

M ∈ $\mathscr{C}$ si et seulement si $QM = \frac{1}{2}$

c'est à dire si et seulement si $\boxed{\left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.}$

2° Etablir les relations suivantes : $\ell = i\,m$ et $p = -i\,m + 1 + i$. On admettra que l'on a également $n = (1 - i)\,m + i$ et $k = (1 + i)\,m$.

MKLO est un carré de sens direct

L est donc l'image de M par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a donc : $\ell - 0 = e^{i\pi/2}\,(m - 0)$ c'est à dire $\ell = i\,m$

Dans le carré de sens direct MAPN, Pest l'image de M ans la rotation de centre A d'angle $-\frac{\pi}{2}$

On a donc : $p - 1 = e^{-i\pi/2}\,(m - 1)$

$p - 1 = e^{-i\pi/2}\,(m - 1) \Leftrightarrow p = 1 - i\,(m - 1) \Leftrightarrow p = 1 - i\,m + i$.

Démontrons que l'on a également $n = (1 - i)\,m + i$ et $k = (1 + i)\,m$. (non demandé)

N est l'image de A dans la rotation de centre M d'angle $\frac{\pi}{2}$: $n - m = i\,(1 - m) \Leftrightarrow n = m + i - i\,m$

K est l'image de O dans la rotation de centre M d'angle $-\frac{\pi}{2}$: $k - m = -i\,(0 - m) \Leftrightarrow k = m + i\,m$

3° a) Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathscr{C}$.

soit ω l'affixe de Ω. On a : $\omega = \frac{p + \ell}{2} = \frac{1 - i\,m + i + i\,m}{2} = \frac{1+i}{2}$. ω est bien indépendant de m

b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.

$\left| \omega - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1+i}{2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{i}{2} \right| = \boxed{\frac{1}{2}}$ donc Ω ∈ $\mathscr{C}$

$\arg\left(\omega - \frac{1}{2}\right) = \arg\left(\frac{i}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ Ω est sur la médiatrice de [OA] au dessus de la droite (OA)

4° a) Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

$KN = |\,n - k\,| = |\,(1 - i)\,m + i - (1 + i)\,m)\,| = |\,m - i\,m + i - m - i\,m\,| = |\,i - 2\,i\,m\,| = |\,2\,i\,| \left| \frac{1}{2} - m \right|$

$\boxed{KN = 2 \times \frac{1}{2} = 1}$.

b) Quelle est la nature du triangle Ω N K ?

$$\omega - k = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} - (1 + i)\, m = (1 + i)\left(\frac{1}{2} - m\right)$$

$$\omega - n = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} - (1 - i)\, m - 1 = \frac{i}{2} - \frac{1}{2} - (1 - i)\, m = (1 - i)\left(\frac{1}{2} - m\right)$$

$$\frac{\omega - k}{\omega - n} = \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{1 + 1} = \frac{1 + 2\,i - 1}{2} = i$$

Le triangle Ω N K est $\boxed{\text{rectangle isocèle en } \Omega}$.

5° Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

$$\Omega N = \left|\ (1 - i)\left(\frac{1}{2} - m\right)\ \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left|\ \frac{1}{2} - m\ \right| = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

N est sur le cercle de $\boxed{\text{centre } \Omega \text{ de rayon } \frac{\sqrt{2}}{2}}$