France septembre 1998 EXERCICE 2

1° On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.

a) Calculer P (4).

b) Résoudre dans C l'équation : P (z) = 0.

2° Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.

Soient A, B, C les points d'affixes respectives :

$a = 4$ $b = 1 + i\sqrt{3}$ $c = 1 - i\sqrt{3}$

a) Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3° Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$

On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

a) Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?

b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4° Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COF H

a) Montrer que le quadrilatère COF H est un carré.

b) Calculer l'affixe du point H.

Le triangle AGH est-il équilatéral ?

CORRECTION

1° On considère le polynôme P défini par : P (z) = $z^3 - 6z^2 + 12z - 16$. a) Calculer P (4).

$P(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 16 = 64 - 96 + 48 - 16 = 0$

$$\begin{array}{r|l} z^3 - 6z^2 + 12z - 16. & z - 4 \\ \hline -z^3 + 4z^2 & z^2 - 2z + 4 \\ \hline -2z^2 + 12z - 16 & \\ +2z^2 - 8z & \\ \hline 4z - 16 & \\ -4z + 16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

b) Résoudre dans C l'équation : P (z) = 0.

P(4) = 0 donc P(z) est divisible par $z - 4$

$P(z) = (z - 4)(z^2 - 2z + 4)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 4$ ou $z^2 - 2z + 4 = 0$

Résolution de $z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 4 - 16 = -12$.

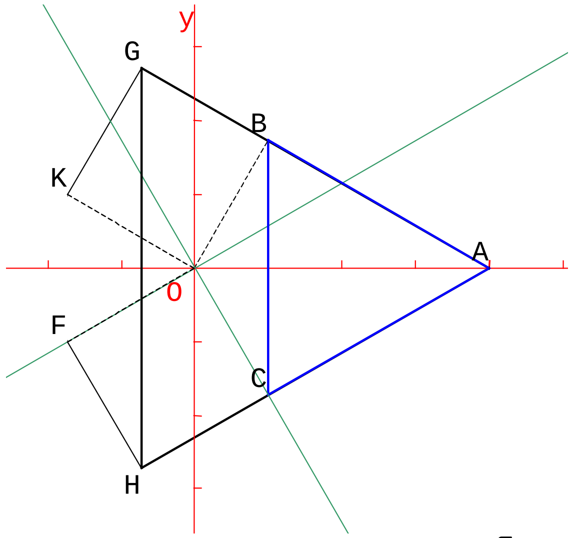
Les racines sont donc complexes conjuguées et égale à :

$z_1 = \dfrac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

On a d c $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 4$ ou $z = 1 + i\sqrt{3}$ ou $z = 1 - i\sqrt{3}$

2° Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm. Soient A, B, C les points d'affixes respectives : $a = 4$ $b = 1 + i\sqrt{3}$ $c = 1 - i\sqrt{3}$

a) Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.



b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

$z_C - z_A = 1 - i\sqrt{3} - 4 = -3 - i\sqrt{3}$

$z_B - z_A = 1 + i\sqrt{3} - 4 = -3 + i\sqrt{3}$.

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$

ABC est donc équilatéral.

3° Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$ On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$. a) Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?

$z_F = e^{i\pi/3} z_K = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} + i) = -\sqrt{3} - i$

$z_G = z_K + z_B = -\sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3} = -\sqrt{3} + 1 + i(1 + \sqrt{3})$

b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

$z_C = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_F = -\sqrt{3} - i$

$\dfrac{z_C}{z_F} = i$ donc $(\overrightarrow{OF} : \overrightarrow{OC}) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $(OF) \perp (OC)$ et OF = OC.

4° Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COF H a) Montrer que le quadrilatère COF H est un carré.

COFH est un parallélogramme, $(OF) \perp (OC)$ et OF = OC. C'est donc un parallélogramme avec un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur c'est donc un carré.

b) Calculer l'affixe du point H. Le triangle AGH est-il équilatéral ?

b) H est l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$

Donc $z_H = z_F + z_C = -\sqrt{3} - i + 1 - i\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$

c) $z_H - z_A = 1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3}) - 4 = -3 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$

$z_G - z_A = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) - 4 = -3 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$.

$e^{i\pi/3}(-3 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})) = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-3 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})) = -3 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$

On a donc $z_H - z_A = e^{i\pi/3}(z_G - z_A)$ donc H est l'image de G par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc AGH est équilatéral direct.