France juin 2001 exercice 2 : 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 6 cm). On considère la suite a_n de nombres réels définie par $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{5\,\pi}{6}$$

Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM_n})$ ait pour mesure a_n.

1° Placer les douze points M_0, M_1, M_2, ..., M_{11}.

2° On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\,n\,\pi}{6}\right)}$

3° a) Montrer pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

- les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés;
- les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}\ z_n$

c) En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points Mn sont de la forme

Mn Mn + 4 Mn + 8.

4° Douze cartons indiscernables au toucher, marqués M0, M1, M2, ..., M11, sont disposés dans une urne.
On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

CORRECTION

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 6 cm). On considère la suite a_n de nombres réels définie par $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = a_n + \frac{5\pi}{6}$ Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n})$ ait pour mesure a_n. 1° Placer les douze points $M_0, M_1, M_2, ..., M_{11}$.

$(\overrightarrow{OM_n},\overrightarrow{OM_{n+1}}) = \frac{5\pi}{6}$ et $OM_n = OM_{n+1}$ donc M_{n+1} est l'image de M_n par la rotation de centre O d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

2° On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

z_n est le complexe de module 1 d'argument a_n donc $z_n = e^{i\,a_n}$

Comme la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{5\pi}{6}$ on a pour tout entier naturel n, $a_n = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \times n$

On a donc bien $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

3° a) Montrer pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

- **les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés;**
- **les points M_n et M_{n+12} sont confondus.**

$a_{n+6} = a_n + 6 \times \frac{5\pi}{6} = a_n + 5\pi$.

On a donc $z_{n+6} = e^{ia_{n+6}} = e^{ia_n} \times e^{i\pi} = -e^{ia_n} = -z_n$ donc O est bien le milieu de $[M_n M_{n+6}]$

$a_{n+12} = a_n + 12 \times \frac{5\pi}{6} = a_n + 10\pi$. $z_{n+12} = e^{ia_{12}} = e^{ia_n} \times e^{2i\pi} = e^{ia_n} = z_n$ donc $M_{n+12} = M_n$

variante M_n et M_{n+4} sont diamétralement opposés et M_{n+4} et M_{n+8} le sont aussi donc $M_{n+12} = M_n$

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$

$a_{n+4} = a_n + 4 \times \frac{5\pi}{6} = a_n - \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ donc $z_{n+4} = e^{ia_{n+4}} = e^{ia_n} \times e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$

c) En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

$$|z_{n+4} - z_n| = \left| z_n \times e^{-\frac{2i\pi}{3}} - z_n \right| = |z_n| \times \left| e^{-\frac{2i\pi}{3}} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i - 1 \right| = \left| -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{9+3} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

On a donc bien $M_nM_{n+4} = \sqrt{3}$. De même $M_{n+4}M_{n+8} = \sqrt{3}$ et $M_{n+4}M_{n+12} = \sqrt{3} = M_{n+4}M_n$

Le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points Mn sont de la forme $M_n M_{n+4} M_{n+8}$.

4° Douze cartons indiscernables au toucher, marqués $M_0, M_1, M_2, ..., M_{11}$, sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

Il y a quatre triplets possibles $M_0M_4M_8$, $M_1M_5M_9$, $M_2M_6M_{10}$ et $M_3M_7M_{11}$.

Il y a $\binom{12}{3}$ triplets possible. Il y a équiprobabilité de tous les tirages donc $p = \frac{4}{\binom{12}{3}} = \frac{4}{\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1}} =$

$$\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 4 \times 11 \times 2 \times 5} = \frac{1}{11 \times 5} = \frac{1}{55}$$