Nouvelle Calédonie nov 2004. 5 points Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2 - 4z$.

1° Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a) Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f .

b) On suppose que deux points ont la même image par f . Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2° Soit I le point d'affixe -3.

a) Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b) Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3° a) Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.

Démontrer que tous les points M du cercle (C) de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

c) Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$.

Donner la forme trigonométrique de $(z_E + 4)$ et à l'aide du 3° a) démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.

Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

CORRECTION

Nouvelle Calédonie nov 2004. Commun à tous les candidats 5 points
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M ' d'affixe z ' telle que : $z' = z^2 - 4z$.
1° Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$. a) Calculer les affixes des points A ' et B ' images des points A et B par f
$z_{A'} = (1 - i)^2 - 4(1 - i) = 1 - 2i + i^2 - 4 + 4i = 1 - 2i - 1 - 4 + 4i = -4 + 2i$
$z_{B'} = (3 + i)^2 - 4(3 + i) = 9 + 6i + i^2 - 12 - 4i = 9 + 6i - 1 - 12 - 4i = -4 + 2i$
b) On suppose que deux points ont la même image par f . Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
$z_1' = z_2' \Leftrightarrow z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2 \Leftrightarrow z_1^2 - 4z_1 - z_2^2 + 4z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) - 4(z_1 - z_2) = 0$
$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 4) = 0 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 0$ ou $z_1 + z_2 - 4 = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ ou $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = 2$
M_1 et M_2 sont donc soit égaux soit symétrique par rapport au point d'affixe 2.
2° Soit I le point d'affixe − 3. a) Démontrer que OMIM ' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.
OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M'I}$ c'est à dire si et seulement si $z - 0 = -3 - z'$.
$z - 0 = -3 - z' \Leftrightarrow z + 3 + z' = 0 \Leftrightarrow z + 3 + z^2 - 4z = 0 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0$.
b) Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.
$\Delta = 9 - 4 \times 3 = -3$ les solutions sont donc : $z_1 = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}$
3° a) Exprimer (z ' +4) en fonction de (z − 2). En déduire une relation entre | z ' + 4 | et | z − 2 | puis entre arg(z ' + 4) et arg(z − 2).
$z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$. On a donc : $|z' + 4| = |z - 2|^2$ et $\arg(z' + 4) = 2 \times \arg(z - 2)$.
b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$. Démontrer que tous les points M du cercle (C) de centre J et de rayon 2 ont leur image M ' sur un même cercle que l'on déterminera.
Si M est sur le cercle (C) alors JM = 2 alors $|z - 2| = 2$. on sait que $KM' = |z' + 4| = \sqrt{|z - 2|}$ donc $KM' = \sqrt{2}$
c) Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$. Donner la forme trigonométrique de $(z_E + 4)$ et à l'aide du 3° a) démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E. Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.
$z_E + 4 = -3i = 3e^{-i\pi/2}$. Soit G un point du plan. On a : $f(z_G) = z_E \Leftrightarrow z_{G'} = z_E$.
On sait que $(z_G' + 4) = (z_G - 2)^2$ on a donc :
$f(z_G) = z_E \Leftrightarrow z_{G'} + 4 = z_E + 4$
$\Leftrightarrow (z_G - 2)^2 = 3e^{-i\pi/2}$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_G - 2|^2 = 3 \\ 2 \times \arg(z_G - 2) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_G - 2| = \sqrt{3} \\ \arg(z_G - 2) = -\dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi] \text{ ou } \arg(z_G - 2) = -\dfrac{\pi}{4} + \pi \quad [2\pi] \end{cases}$$
$\Leftrightarrow z_G = \sqrt{3}\, e^{-i\pi/4} + 2$ ou $z_G = \sqrt{3}\, e^{3i\pi/4} + 2$
On trouve bien deux points dont l'image par f est le point E.
$$z_1 = \sqrt{3}\, e^{-i\pi/4} + 2 = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 = \frac{\sqrt{6} + 4}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$
et $$z_2 = \sqrt{3}\, e^{3i\pi/4} + 2 = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 = \frac{-\sqrt{6} + 4}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$