Inde, avril 2005 (Pondichéry 2005)
Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2\,i$, par B le point d'affixe $-2 + 2\,i$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.
1° Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ et calculer son rayon.
2° Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3 + 9\,i}{4 + 2\,i}$
Ecrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathscr{C})$.
3° Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ est $\dfrac{\pi}{4}$
a) Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.
b) En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\,i$
4° Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z′ tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\pi/4}\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

a) Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.
b) Soit K le point d'affixe $z_K = 2$. Déterminer par le calcul l'image de K par r.
Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

CORRECTION

1° Milieu de [AB] $\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{1-2\,i+(-2+2\,i)}{2}=-\frac{1}{2}$ le centre Ω de (C) est le point d'affixe $-\frac{1}{2}$.

le rayon est égale à : $\frac{|z_B-z_A|}{2}=\frac{|-2+2\,i-(1-2\,i)|}{2}=\frac{|-3+4\,i|}{2}=\frac{\sqrt{9+16}}{2}=\frac{5}{2}$

2° $z_D=\frac{3+9\,i}{4+2\,i}=\frac{(3+9\,i)\,(4-2\,i)}{16+4}=\frac{12-6\,i+36\,i+18}{20}=\frac{30\,i+30}{20}=\boxed{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\,i.}$

$\left|z_D+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\,i+\frac{1}{2}\right|=\left|2+\frac{3}{2}\,i\right|=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}$ donc $\boxed{D\in(C\ )}$

3° a) $z_E+\frac{1}{2}$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega E}$ on a donc : $\left|z_E+\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2}$ car $E\in\mathscr{C}\left(\Omega,\frac{5}{2}\right)$ et

$\arg\left(z_E+\frac{1}{2}\right)=(\vec{u},\overrightarrow{\Omega E})=(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E})=\frac{\pi}{4}.$ $\quad$ ($\overrightarrow{\Omega I}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\vec{u}$ donc $\overrightarrow{\Omega E}$ et $\vec{u}$ colinéaires de même sens)

b) $z_E-z_\Omega=\frac{5}{2}\,e^{i\pi/4}$ donc $z_E=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}\,i=\frac{5\sqrt{2}-2}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}\,i$

4° a) $z'+\frac{1}{2}=e^{i\pi/4}\left(z+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow z'-z_\Omega=e^{i\pi/4}\,(z-z_\Omega)$ donc r est la rotation de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{4}$

b) $z'+\frac{1}{2}=e^{i\pi/4}\left(z_K+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow z'=-\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{2}-2}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}\,i=z_E$

$\left|2+\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2}$ donc $K\in(\mathscr{C})$ et donc K' est aussi un point de $\mathscr{C}\left(\Omega,\frac{5}{2}\right)$ (r rotation de centre Ω)

De plus $(\overrightarrow{\Omega K'},\overrightarrow{\Omega K})=\frac{\pi}{4}=(\overrightarrow{\Omega K'},\overrightarrow{\Omega I})$ car $\overrightarrow{\Omega K}=\left(2+\frac{1}{2}\right)\vec{u}$, donc $\overrightarrow{\Omega K}$ est colinéaire de même sens que $\overrightarrow{\Omega I}$

$$\left.\begin{array}{r}(\overrightarrow{\Omega K'},\overrightarrow{\Omega I})=\frac{\pi}{4}\\ K'\in(\mathscr{C})\end{array}\right\}\text{ donc } K'=E$$