COMPLEXES

Sujet	Petit résumé.
Liban mai 2006	Transformations. Homothétie . application : $z' = (1 + i) z + 1$.
Amérique du Nord juin 2005	QCM
Antilles – Guyane juin 2005	Application $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$ Image d'un cercle, équation paramétrique d'un cercle
Asie juin 2005	Equation complexe et transformations Application $z' = \frac{i z + 10 - 2 i}{z - 2}$
Centre étranger juin 2005	Géométrie. divers On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble C des points M appartenant à E tels que le triangle MNP soit rectangle en P.
Liban juin 2005	Transformations : rotations diverses. On se propose désormais de montrer que la distance MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.
Inde, avril 2005 (Pondichéry 2005)	Transformation. détermination d'une rotation Calculs divers
Nouvelle Calédonie novembre 2004	Application : $z' = z^2 - 4 z$. Equation du second degré.
Antilles–Guyane septembre 2004	Transformation et triangles équilatéraux.
Complexe France septembre 2004	Equation du second degré. barycentre
Liban juin 2004	Equation complexe Application : $z' = \frac{z - 2 i}{z - 1 - i}$
Amérique du Sud novembre 2003	Calculs Application : à tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = a z$.
France juin 2003	Transformations. triangle rectangle et points alignés
Asie juin 2003	Application : $z' = z^2 - 2 (1 + i) z$. Transformations
Asie 2002	Equations complexes : $(z^2 - (1 + 3 i) z - 6 + 9 i) (z^2 - (1 + 3 i) z + 4 + 4 i) = 0$ Application : $z' = z^2 - (1 + 3 i) z - 6 + 9 i$.
France juin 2001	Suite de points $a_{n+1} = a_n + \frac{5 \pi}{6}$
Antilles–Guyane septembre 2000	$f (z) = z^4 - 10 z^3 + 38 z^2 - 90 z + 261$. Equation, isobarycentre, ensemble de points.
National 2000	Equation paramétrique d'un cercle. Transformations
France septembre 1999.	Géométrie. Module et arguments. Aire maximale d'un carré
France septembre 1998	Equation du troisième degré $z^3 - 6 z^2 + 12 z - 16 = 0$ Géométrie

Liban mai 2006 EXERCICE 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1° a) Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport ,$\sqrt{2}$.

b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Placer les points A, B et B'.

2° On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'tel que : $z' = (1 + i) z + 1$.

a) Montrer que B a pour image B' par f .

b) Montrer que A est le seul point invariant par f .

c) Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\frac{z' - z}{i - z} = - i$.

Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.

En déduire une méthode de construction de M' à partir de M, pour M distinct de A.

3° a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $| z - 2 | = \sqrt{2}$.

b) Démontrer que $z' - 3 - 2 i = (1 + i) (z - 2)$.

En déduire que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.

c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

Amérique du Nord juin 2005 EXERCICE 1 4 points

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1° Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3\,\mathrm{i}$, $-3-\mathrm{i}$ et $2{,}08+1{,}98\,\mathrm{i}$.
Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle

(b) : rectangle et non isocèle

(c) : rectangle et isocèle

(d) : ni rectangle ni isocèle

2° A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4\,\mathrm{i}}{z+2}$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

(a): un cercle de rayon 1

(b) : une droite

(c) : une droite privée d'un point

(d): un cercle privé d'un point

3° Les notations sont les mêmes qu'à la question 2°
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a): un cercle

(b) : une droite

(c) : une droite privée d'un point

(d): un cercle privé d'un point

4° Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i.

L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

(a) $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$

(b) $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$

(c) $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$

(d) $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$

Baccalauréat S Antilles – Guyane juin 2005

$(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.

Soit A le point d’affixe 1 ; soit B le point d’affixe −1.

Soit F l’application de $\mathscr{P}$ privé de O dans P qui à tout point M d’affixe z distinct de O associe le point M′ = F(M) d’affixe $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$

1° a) Soit E le point d’affixe $e^{i\pi/3}$, on appelle E′ son image par F.

Déterminer l’affixe de E′ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

b) On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l’image de $\mathscr{C}_1$ par l’application F.

sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du a).

1° a) Soit E le point d’affixe $e^{i\pi/3}$, on appelle E′ son image par F.

Déterminer l’affixe de E′ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

b) On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l’image de $\mathscr{C}_1$ par l’application F.

2° a) Soit K le point d’affixe $2\,e^{i\pi/6}$ et K′ l’image de K par F.

Calculer l’affixe de K′.

b) Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l’image de $\mathscr{C}_2$ par l’application F.

3° On désigne par R un point d’affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi , \pi[$.

R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

a) Montrer que $z' + 1 = \dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z}}$

En déduire que : $| z' + 1 | = | z' |$.

b) Si on considère maintenant les points d’affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi , \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du a).

Asie juin 2005 Complexe 5 points

Réservé aux candidats n’ayant pas choisi l’enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère dans l’ensemble des nombres complexes, l’équation (E) d’inconnue *z* suivante :

$z^3 + (-8 + i)\,z^2 + (17 - 8\,i)\,z + 17\,i = 0$.

I. Résolution de l’équation (E).

1° Montrer que −i est solution de (E).

2° Déterminer les nombres réels a, b, c tels que :

$z^3 + (-8 + i)\,z^2 + (17 - 8\,i)\,z + 17\,i = (z + i)\,(a\,z^2 + b\,z + c)$.

3° Résoudre l’équation (E) dans l’ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d’affixes respectives 4 + i, 4 − i, − i.

1° Placer les points sur une figure que l’on complétera dans la suite de l’exercice.

2° Le point Ω est le point d’affixe 2. On appelle S l’image de A par la rotation de centre Ω et d’angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Calculer l’affixe de S.

3° Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathscr{C}$.

4° A tout point M d’affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d’affixe $z' = \dfrac{i\,z + 10 - 2\,i}{z - 2}$

a) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.

b) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathscr{C}'$ de centre P, d’affixe i. Déterminer son rayon et tracer $\mathscr{C}'$.

c) Pour tout nombre complexe $z' = 2$, exprimer $| z' - i |$ en fonction de z.

d) Soit M un point d’affixe z appartenant au cercle $\mathscr{C}$. Démontrer que $| z' - i | = 2\sqrt{5}$.

e) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathscr{C}$.

centre étranger juin 2005 Exercice 2 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 8 cm.
On appelle A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1.
On appelle E l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.
A tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble E , on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.
1° Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.
2° On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble C des points M appartenant à E tels que le triangle MNP soit rectangle en P.
a.) En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que MNP est rectangle en P si et seulement si

$$|z+1|^2+|z|^2=1.$$

b) Démontrer que $|z+1|^2+|z|^2=1$ équivaut à $\left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4}$.
c) En déduire l'ensemble C cherché.
3° Soit M un point de E et z son affixe, on désigne par r le module de z et α l'argument de z, $\alpha \in\ ]-\pi, \pi]$.
a) Démontrer que l'ensemble F des points M de E tels que l'affixe de P soit un réel strictement positif est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points).
b) Représenter les ensembles C et F dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
c) Déterminer les affixes des points M de E tels que le triangle MNP soit rectangle en P, l'affixe de P étant un réel strictement positif.

Liban juin 2005 Exercice 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 0,5cm.
On note j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.
Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$
Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$
Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$
1° Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.
2° On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'
a) Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.
Montrer que $b' = 16\,e^{-i\pi/3}$.
b) En déduire que O est un point de la droite (BB').
On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$
c) Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.
3° On se propose désormais de montrer que la distance MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.
a) Calculer la distance OA + OB + OC.
b) Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
c) On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.
On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :
$|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j| = |a+bj^2+cj| = 22$.
d) On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :

$$|z+z'+z''| \leq |z|+|z'|+|z''|.$$

Montrer que MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

Inde, avril 2005 (Pondichéry 2005)
EXERCICE 2 : 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2\,i$, par B le point d'affixe $-2 + 2\,i$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.
1° Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ et calculer son rayon.
2° Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3+9\,i}{4+2\,i}$
Ecrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathscr{C})$.
3° Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ est $\dfrac{\pi}{4}$
a) Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.
b) En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\,i$
4° Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z′ tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\pi/4}\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

a) Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.
b) Soit K le point d'affixe $z_K = 2$. Déterminer par le calcul l'image de K par r.
Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

Nouvelle Calédonie nov 2004. 5 points Commun à tous les candidats
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2 - 4\,z$.
1° Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.
a) Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f .
b) On suppose que deux points ont la même image par f . Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
2° Soit I le point d'affixe -3.
a) Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3\,z + 3 = 0$.
b) Résoudre l'équation $z^2 - 3\,z + 3 = 0$.
3° a) Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|\,z' + 4\,|$ et $|\,z - 2\,|$ puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.
b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
Démontrer que tous les points M du cercle (C) de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.
c) Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3\,i$.
Donner la forme trigonométrique de $(z_E + 4)$ et à l'aide du 3° a) démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E. Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

Antilles–Guyane septembre 2004 EXERCICE 2 5 points

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA', ACB' et ABC'. On considère respectivement les points P, Q et R centres de gravités respectifs des triangles B CA', ACB' et ABC'. On note a, b, c, a', b', c', p, q et r les affixes respectives des points A, B, C, A', B', C', P,Qet R.

1° a. Traduire, avec les affixes des points concernés, que C' est l'image de A dans une rotation d'angle de mesure dont on précisera le centre.

b) Montrer que $a' + b' + c' = a + b + c$.

2° En déduire que $p + q + r = a + b + c$.

3° En déduire que les triangles ABC, A'B'C' et PQR ont même centre de gravité.

4° Montrer que : $3 (q - p) = (b' - c)+(c - a')+(a - b)$.

On admettra que, demême : $3 (r -p) = (a - c)+(b - a') + (c' - b)$.

5° Justifier les égalités suivantes :

$a - c = e^{i\pi/3} (b' - c)$; $b - a' = e^{i\pi/3} (c - a')$; $c' - b = e^{i\pi/3} (a - b)$.

6° Déduire des questions 4° et 5° que le triangle PQR est équilatéral.

Complexe France septembre 2004 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

1° Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante :

$z^2 - 8 z \sqrt{3} + 64 = 0$.

2° On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$a = 4\sqrt{3} - 4 i$ et $b = 4\sqrt{3} + 4 i$.

a) Ecrire a et b sous forme exponentielle.

b) Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3° On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$

Déterminer l'affixe d du point D.

4° On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O; −1), (D; + 1), (B ; + 1).

a) Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6 i$.

b) Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c) Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d) Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

5° Quelle est la nature du triangle AGC ?

LIBAN JUIN 2004 EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(z -2 i) z^2 - 2 z + 2)= 0$.

Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier les réponses).

2° Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = 2 i$.

A tout complexe z différent de A on associe le complexe $z' = \dfrac{z - 2i}{z - 1 - i}$

a) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur. Montrer que $B \in (E)$. Déterminer et construire l'ensemble (E).

b) Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $| z' | = 1$.

Déterminer et construire (F).

3° Soit R la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Calculer l'affixe du point B', image de B par R et l'affixe du point I', image par R du point $I\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

b) Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

Amérique du Sud novembre 2003 **EXERCICE 2 5 points Enseignement obligatoire**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm).
Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [OI] et on nomme son centre Ω.

Partie A

On pose $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.

1° Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathscr{C}$.

2° Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1 + 2i$, et B' le point d'affixe b telle que $b' = a_0 b$.

a) Calculer b'.

b) Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

Partie B

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.
À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = a z$.

1° On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.

a) Interpréter géométriquement $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$.

b) Montrer que $(\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$).

c) En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle $\mathscr{C}$ privé de O et de I.

2° Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O.
On note x son affixe.
On choisit a de manière que A soit un point de $\mathscr{C}$ différent de I et de O.
Montrer que le point M' appartient à la droite (OA).
En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

France juin 2003 **EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

1° a)Placer les points A, B et C sur une figure.

b) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2° a) On appelle r la rotation de centre A telle que r(B) = C.
Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point D = r(C).

b) Soit Γ le cercle de diamètre [BC].
Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r .

3° Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r .

a.)Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $[0 ; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2} ; +\infty[$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.

b) Exprimer z' en fonction de θ .

c) Montrer que $\frac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

d) Placer sur la figure le point M d'affixe $1+ e^{2i\pi/3}$ et construire son image M' par r.

Asie juin 2003 **EXERCICE 2 : 4 points Enseignement obligatoire**

Γ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$

1° A tout point M d'affixe z, on associe le point M'd'affixe z' telle que :

$z' = z^2 - 2(1 + i)z$.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b. Soit H l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel .Montrer que H est la représentation graphique d'une fonction h que l'on déterminera

(l'étude de la fonction h n'est pas demandée). H est tracée sur le graphique ci-dessous.

2° Montrer que le point A d'affixe $a = 2(1 + i)$ appartient à Γ et H.

3° Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

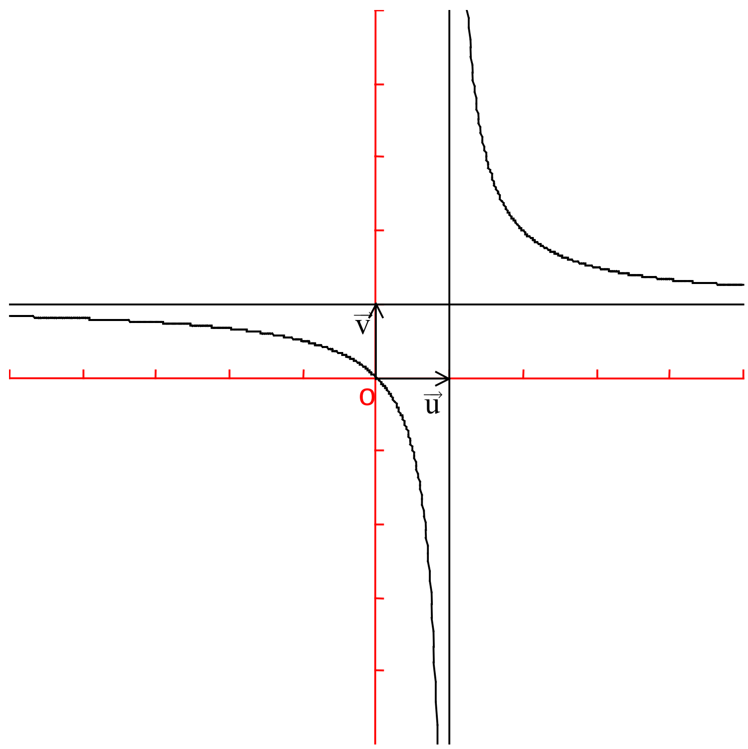
On note B et C les points tels que R(A) = B et R(C) = A.

a) Montrer que R(B) = C et que les triangles OAB, OBC et OCA sont isométriques.

b) Quelle est la nature du triangle ABC?

c) Montrer que B et C appartiennent à Γ et H.

d. Tracer Γ et placer A, B et C sur le graphique ci-dessous



Asie 2002 5 points
1° Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormak direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 3, $4i$, $-2+3$ iet $1-i$.
a) Placer les points A, B, C et D dans le plan.
b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.
2° On considère dans l'ensemble des complexes les équations :

$$z^2 - (1+3\,i)\,z - 6 + 9\,i = 0 \qquad (1)$$

$$\text{et} \quad z^2 - (1+3\,i)\,z + 4 + 4\,i = 0 \qquad (2)$$

a) Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1 et l'équation (2) une solution imaginaire pure z_2.
b) Développer $(z-3)(z+2-3\,i)$, puis $(z-4\,i)(z-1+i)$
c) En déduire les solutions de l'équation :

$$(z^2 - (1+3\,i)\,z - 6 + 9\,i)\,(z^2 - (1+3\,i)\,z + 4 + 4\,i) = 0$$

d) Soit z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative.
Donner la forme trigonométrique de z_0
e) Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n d'affixes z_0^n soient sur la droite d'équation $y = x$
3° On appelle f l'application qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - (1+3\,i)\,z - 6 + 9\,i\,.$$

a) On pose $z = x + i\,y$ et $z' = x' + y'\,i$. Exprimer x' et y' en fonction de xet y.
b) Déterminer une équation de l'ensemble (H) des points M pour lesquels f(M) appartient à l'axe des ordonnées.

France juin 2001 exercice 2 : 5 points
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 6 cm). On considère la suite a_n de nombres réels définie par $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{5\,\pi}{6}$$

Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM_n})$ ait pour mesure a_n.
1° Placer les douze points $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{11}$.
2° On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\,n\,\pi}{6}\right)}$
3° a) Montrer pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

- les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés;
- les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}\,z_n$
c) En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points Mn sont de la forme

Mn Mn + 4 Mn + 8.

4° Douze cartons indiscernables au toucher, marqués M0, M1, M2, ..., M11, sont disposés dans une urne.
On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

Antilles–Guyane septembre 2000

1° Pour tout nombre complexe z, on considère $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$.

a) Soit b un nombre réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de f (i b).

En déduire que l'équation f (z) = 0 admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

b) Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta).$$

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : f (z) = 0.

2° Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal.

a) Placer dans le plan P les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixes : $a = 3i$, $b = -3i$, $c = 5 + 2i$ et $d = 5 - 2i$.

b) Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C, D.

c) Déterminer l'ensemble E des points M de P tels que : $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \| = 10$.

Tracer E sur la figure précédente.

National 2000 Exercice 2 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,unité graphique 4 cm, on considère les points A d'affixe $z_A = 1$ et B d'affixe $z_B = 2$.

Soit un réel θ appartenant à l'intervalle $]0 ; \pi[$.

On note M le point d'affixe

$$z = 1 + e^{2i\theta}$$

1° Montrer que le point M appartient au cercle C de centre A et rayon 1.

2° Exprimer l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$en fonction de θ.

En déduire l'ensemble E des points M quand θ décrit l'intervalle $]0 ; \pi[$.

3° On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle -2θ et on note z ' l'affixe de M'. Montrer que $z' = \overline{z}$, puis que M' appartient à C.

4° Dans toute la suite on choisit $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-2\dfrac{\pi}{3}$ et A' l'image de A par r.

a) Définir l'image C' du cercle C par r.

Placer sur une figure A, B, C, M, C' puis le point M' image de M par r.

b) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

c) Montrer que C et C' se coupent en O et M'.

d) Soit le point P symétrique de M par rapport à A.

Montrer que M' est le milieu de [A' P].

France septembre 1999.
Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On note Z_M l'affixe du point M.
Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe 4 i.
1° Soit θ un réel de $[\, 0 \,,\, 2\,\pi[$ et r un réel strictement positif.
On considère le point E d'affixe $r\,e^{i\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant

$$(\overrightarrow{OE},\ \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{2}.$$

Quelle est, en fonction de r et θ, l'affixe de F ?
2° Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice.
On choisira, uniquement pour cette figure : $\theta = \dfrac{5\,\pi}{6}$ et $r = 3$
3° On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments [AB], [BE], [EF], [FA].
a) Prouver que PQRS est un parallélogramme
b) On pose : $Z = \dfrac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}$.
Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que PQRS est un carré.
c) Calculer, en fonction de r et θ, les affixes respectives des points P et Q.
d) Quelle est, en fonction de r et θ, l'aire du carré PQRS ?
r étant fixé, pour quelle valeur de θcette aire est-elle maximale ? Quelle est alors l'affixe de E ?

France septembre 1998 EXERCICE 2
1° On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - 6\,z^2 + 12\,z - 16$.
a) Calculer P (4).
b) Résoudre dans C l'équation : P (z) = 0.
2° Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.
Soient A, B, C les points d'affixes respectives :
$a = 4 \qquad b = 1 + i\sqrt{3} \qquad c = 1 - i\sqrt{3}$
a) Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
3° Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$
On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
a) Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?
b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.
4° Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COF H
a) Montrer que le quadrilatère COF H est un carré.
b) Calculer l'affixe du point H.
Le triangle AGH est-il équilatéral ?