Pondichéry 3 avril 2006
EXERCICE 1 4 points
Commun à tous les candidats
Dix affirmations, réparties en trois thèmes et numérotées de 1° a à 3° d sont pro-posées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX. Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1° Pour tout réel x, ex désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1° a	Pour tous les réels a et b : $(e^a)^b = e^{(ab)}$.
Affirmation 1° b	Pour tous les réels a et b : $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
Affirmation 1° c	La droite d'équation y = x +1 est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

2° Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2° a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2° b	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
Affirmation 2° c	Si f est dérivableen a, alors la fonction $h \longmapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

3° On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3° a	Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = 0$.
Affirmation 3° b	Si (U_n) converge vers un réel non nul et si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$, alors la suite $(U_n \times V_n)$ ne converge pas.
Affirmation 3° c	Si (U_n) converge vers un réel non nul, si (V_n) est positive et si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$, alors la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3° d	lSi (U_n) et (V_n) convergent alors la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ converge.

Affirmation 1° a	Pour tous les réels a et b : $(e^a)^b = e^{(ab)}$.

FAUX
$(e^a)^b = e^{ab}$
$(e^a)^b = e^{(ab)} \Leftrightarrow e^{ab} = e^{(ab)} \Leftrightarrow a\,b = \ln\left(e^{(ab)}\right) \Leftrightarrow a\,b = a^b$ ce qui est faux
On peut aussi donner un contre exemple $(e^2)^0 = 1$ et $e^{(20)} = e^1 = 1$.

Affirmation 1° b	Pour tous les réels a et b : $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

VRAI

Affirmation 1° c	La droite d'équation y = x +1 est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

FAUX
Equation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = e^1 + e^1 \times (x - 1)$ c'est à dire $y = e \times x$. Remarque : cette tangente passe par l'origine du repère

2° Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2° a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

VRAI.

Affirmation 2° b	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.

FAUX
La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 et elle n'est pas dérivable en 0.

Affirmation 2° c	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

VRAI
C'est la définition

3° On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3° a	Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = 0$.

FAUX
Soit les suite (U_n) et (V_n) définies par : $U_n = n^2$ et $V_n = -n$
On a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$ et pourtant $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n + V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - n = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Affirmation 3° b	Si (U_n) converge vers un réel non nul et si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$, alors la suite ($U_n \times V_n$) ne converge pas.

VRAI
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n \times V_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n \times V_n = -\infty$

Affirmation 3° c	Si (U_n) converge vers un réel non nul, si (V_n) est positive et si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ ne converge pas.

VRAI
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = +\infty$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = -\infty$

Affirmation 3° d	Si (U_n) et (V_n) convergent alors la suite $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ converge.

FAUX
Dans le cas où $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n \neq 0$ la suite $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ diverge