Exercice 1} (4 points}
Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci -dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.
{Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».}
Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points. Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1. « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ »

2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0\,;+\infty\,[$, g ne s'annulant pas :

«Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ »

3. « Si f est une fonction définie sur $[\,0\,,+\infty\,[$ telle que $0 \le f(x) \le \sqrt{x}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ».

4. On considère un repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$ du plan.

« Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$ ».

5. « La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)\,e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)\,e^x$ ».

6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2.

«Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1 alors G est le milieu du segment [CI] ».

7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1

« L'ensemble des points M du plan tels que $\|\, 3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\,\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».

8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.

« Le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si M = A ou M = B ».

CORRECTION

Exercice 1 (4 points}

1. **« Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur [a ;+ ∞ [, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ »**

Faux : contre-exemple. la fonction f définie sur [1 , + ∞[par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. **Soient f et g deux fonctions définies sur [0 ; + ∞ [, g ne s'annulant pas :**

«Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ »

Faux : contre exemple. soient f et g définies sur [0 , + ∞ [par : $f(x) = -x^2$ et $g(x) = x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ $\quad \dfrac{\infty}{\infty}$ est une forme indéterminée.

3. **« Si f est une fonction définie sur [0 , + ∞ [telle que $0 \le f(x) \le \sqrt{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ».**

Vrai : $0 \le f(x) \le \sqrt{x}$ donc en multipliant par $x > 0$ on obtient : $0 \le \dfrac{f(x)}{x} \le \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

On utilise le théorème des gendarmes. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

4. **« Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ».**

Faux : contre-exemple. la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$ n'admet pas la droite d'équation x = 0 comme asymptote car $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

5. **« La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$ ».**

Vrai : $f'(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 1)e^x$

$f'(x) - f(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 1)e^x - (x^2 + 3x + 1)e^x = (2x + 3)e^x$

6. **Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et – 2.**

«Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, – 2 et 1 alors G est le milieu du segment [CI] ».

Vrai

G bary	A	B	C
	3	– 2	1

donc par associativité

G bary	I	C
	1	1

7. **Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, – 2 et 1**

« L'ensemble des points M du plan tels que $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1»

Faux : G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, – 2 et 1 donc

$3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (3 - 2 + 1)\,\overrightarrow{MG}$ et $\|\,3\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\,\| = 1 \Leftrightarrow 2\,MG = 1$

On obtient un cercle de centre G de rayon $\dfrac{1}{2}$

8. **Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.**

« Le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si M = A ou M = B ».

Faux : Si M est un point du cercle de diamètre [AB] alors on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, $M \ne A$ et $M \ne B$