Réunion juin 2004. 6 points

On désigne par f une fonction dérivable sur R et par f' sa fonction dérivée.

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x, $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$,

(2) $f'(0) = 1$,

(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1° a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.

b) Calculer f (0).

2° En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f .

3° On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

a) Calculer u(0) et v(0).

b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

c) En déduire les fonctions u et v.

d) En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4° a) Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

5° a) Soi tm un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer cette solution lorsque m = 3 (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

n° 74 p 194

1° a) $f'(x))^2 = 1 + (f(x))^2 \geq 1$

b) $(f'(0))^2 - (f(0))^2 = 1$ donc $1^2 - (f(0))^2 = 1$ donc $f(0) = 0$.

2° $2\ f'(x) \times f''(x) - 2\ f(x) \times f(x) = 0$. On a donc : $2\ f'(x)\ (f''(x) - f(x)) = 0$

comme pour tout réel x $f'(x) \neq 0$ on a . pour tout réel x, $f''(x) = f(x)$.

3° a) $u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1$ et $v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1$.

b) $u' = f'' + f' = f + f' = u$

$v' = f'' - f' = f - f' = -v$

c) u est de la forme $x \longmapsto C\ e^x$ et comme $u(0) = 1$ on a $C = 1$

v est de la forme $x \longmapsto C\ e^{-x}$ et comme $v(0) = 1$ on a $C = 1$.

d) pour tout réel x on a :

$$\begin{cases} f'(x) + f(x) = e^x \\ f'(x) - f(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow f(x) + f(x) = e^x - e^{-x} \Rightarrow f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

4° a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) f est la somme de deux fonctions dérivables $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de f '	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

5° a) $f(x) = m \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = m \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2\ m \Leftrightarrow e^{2x} - 2\ m\ e^x - 1 = 0$.

On pose $X = e^x$

$X^2 - 2\ m\ X - 1 = 0$.

$\Delta = (2\ m)^2 - 4 \times (-1) = 4\ m^2 + 4 > 0$.

On a donc deux solutions :$\alpha_1 = \frac{2\ m + 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m + \sqrt{m^2+1}$ et $\alpha_2 = m - \sqrt{m^2+1}$

On a donc $e^{2x} - 2\ m\ e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = m + \sqrt{m^2+1}$ ou $e^x = m - \sqrt{m^2+1}$

l'équation $e^x = k$ admet une solution si et seulement si k est positif.

$m - \sqrt{m^2+1} < 0$ donc l'équation $e^x = m - \sqrt{m^2+1}$ n'a pas de solution

$m + \sqrt{m^2+1} > 0$ donc l'équation $e^x = m + \sqrt{m^2+1}$ a une et une seule solution $\ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right)$

Remarque : $\alpha_1 \times \alpha_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2\ m}{2} < 0$ donc les solutions sont de signes contraires.

b) Si m = 3 on a : $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = \ln\left(3 + \sqrt{3^2+1}\right) = \ln\left(3 + \sqrt{10}\right) \approx 1{,}82$.