Amérique du nord mai 2004. 8 points

Commun à tous les candidats

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle : (E_n) $y' + y = \dfrac{x^n}{n\,!}e^{-x}$.

1° On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel : $g(x) = h(x)\,e^{-x}$.

a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel, $h'(x) = \dfrac{x^n}{n\,!}$.

b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.
Quelle est alors la fonction g ?

2° Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation : (F) $y' + y = 0$.

b) Résoudre (F).

c) Déterminer la solution générale f de l'équation (E_n).

d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k\,!} = e$ (on rappelle que par convention $0\,! = 1$).

1° On pose, pour tout x réel, $f_0(x) = e^{-x}$, $f_1(x) = x\,e^{-x}$.

a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b) Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la Partie I, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geq 1$: $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n\,!}e^{-x}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose: $I_n = \int_1^0 f_n(x)\,dx$. (on ne cherchera pas à calculer I_n)

a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle [0 ; 1], l'encadrement :

b) $0 \leq fn(x) \leq \dfrac{x^n}{n\,!}$. En déduire que $0 \leq In \leq \dfrac{1}{(n+1)\,!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{1}{k\,!}e^{-1}$,

puis déterminer la limite de la suite (I_n).

c) Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que : $I_n = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{e^{-1}}{k\,!}$.

d) En déduire finalement : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k\,!} = e$.

CORRECTION

Partie A

$(E_n)\ \ y' + y = \dfrac{x^n}{n\,!}\,e^{-x}$

1° $g(x) = h(x)\,e^{-x}$ a) g solution de (En) si et seulement si pour tout réel x : $g'(x) + g(x) = \dfrac{x^n}{n\,!}\,e^{-x}$

$g(x) = h(x)\,e^{-x}$ donc $g'(x) = h'(x)\,e^{-x} - h(x)\,e^{-x}$

$g'(x) + g(x) = \dfrac{x^n}{n\,!}\,e^{-x} \Leftrightarrow h'(x)\,e^{-x} - h(x)\,e^{-x} + h(x)\,e^{-x} = \dfrac{x^n}{n\,!}\,e^{-x} \Leftrightarrow h'(x) = \dfrac{x^n}{n\,!}$ (car $e^{-x} \neq 0$)

b) h est donc une primitive de la fonction : $x \longmapsto \dfrac{x^n}{n\,!}$ donc h est de la forme $h : x \longmapsto \dfrac{1}{n\,!} \times \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ où c est une constante . $h(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,!} + c$ et $h(0) = 0$ si et seulement si $h(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}$ et $c = 0$.

On a alors : $g(x) = h(x)\,e^{-x} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\,e^{-x}$

2° a) g solution de (En) donc pour tout réel x , $g'(x) + g(x) = \dfrac{x^n}{n\,!}\,e^{-x}$

φ solution de (En) si et seulement si pour tout réel x, $\varphi'(x) + \varphi(x) = \dfrac{x^n}{n\,!}\,e^{-x}$

$\varphi'(x) + \varphi(x) = \dfrac{x^n}{n\,!}\,e^{-x} \Leftrightarrow \varphi'(x) + \varphi(x) = g'(x) + g(x) \Leftrightarrow (\varphi - g)'(x) + (\varphi - g)(x) = 0$

On a bien : φ solution de (En) si et seulement si φ – g solution de (F)

b) Les solutions de (F) sont de la forme :

$$x \longmapsto k\,e^{-x} \text{ où k est une constante.}$$

c) φ solution de (En) si et seulement si φ – g solution de (F) si et seulement si il existe une constante k telle que pour tout réel x $\varphi(x) - g(x) = k\,e^{-x}$

les solutions générales de (En) sont donc de la forme :

$$x \longmapsto k\,e^{-x} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\,e^{-x} \text{ où k est une constante}$$

d) Il faut déterminer la constante k telle que la fonction $f : x \longmapsto k\,e^{-x} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\,e^{-x}$ soit la solution vérifiant la condition initiale donnée.

$f(0) = 0 \Leftrightarrow k\,e^0 + \dfrac{0^{n+1}}{(n+1)\,!}\,e^0 = 0 \Leftrightarrow k = 0$. la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\,e^{-x}$

Partie B

1° a) $f_0(x) = e^{-x}$ et $f_1(x) = x\,e^{-x}$

Pour tout réel x , $f_1'(x) + f_1(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} + e^{-x} = -\,x\,e^{-x} = f_0(x)$

f_1 est bien solution de l'équation : $y' + y = f_0$

b) $\mathscr{P}(n)$: la solution f_n de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}(x)$ qui s'annule en 0 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n\,!}\,e^{-x}$

Initialisation :

f_1 est la solution de $y' + y = f_0$ qui s'annule en 0 et $f_1(x) = x\,e^{-x} = \dfrac{x^1}{1\,!}\,e^{-x}$

La propriété $\mathscr{P}(1)$ est donc bien vérifiée.

Hérédité :

Si $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée alors la solution f_n de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}(x)$ qui s'annule en 0 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n\,!}\,e^{-x}$

On cherche donc la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_n(x)$ qui s'annule en 0 c'est à dire la solution de (En) qui s'annule en 0.

Dans la partie A on a vu que cette solution est la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\,e^{-x}$ c'est à dire la fonction f_n. La propriété $\mathscr{P}(n + i)$ est donc bien vérifiée.

Conclusion : la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire à partir de 1 donc elle est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

2° a) Pour tout réel x de [0 , 1], $0 \leq e^{-x} \leq 1$

Comme pour tout réel x de [0 , 1], $\frac{x^n}{n!} \geq 0$ on a donc pour tout réel x de [0 , 1], $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$

On intègre les inégalités sur [0 , 1] et on obtient : $0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!}\,dx$.

On a $\int_0^1 \frac{x^n}{n!}\,dx = \left[\frac{1}{n!} \times \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$. donc $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$

b) $I_k - I_{k-1} = \int_0^1 \frac{x^k}{k!} e^{-x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x}\,dx = \int_0^1 (f_k(x) - f_{k-1}(x))\,dx$

Par définition la fonction f_k est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{k-1}$

On a donc pour tout réel x, $f_k'(x) + f_k(x) = f_{k-1}(x)$ et donc $f_k(x) - f_{k-1}(x) = -f_k'(x)$.

$I_k - I_{k-1} = \int_0^1 (f_k(x) - f_{k-1}(x))\,dx = -\int_0^1 f_k'(x)\,dx = [-f_k(x)]_0^1 = -f_k(1) = -\frac{1}{k!} e^{-1}$

Remarque : Un calcul direct de $f_k(x) - f_{k-1}(x)$ ne donne rien.

En effet $f_k(x) - f_{k-1}(x) = \left(\frac{x^k}{k!} - \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right) e^{-x} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{x}{k} - 1\right) e^{-x}$ ce qui, à priori, ne permet pas de conclure.

c) $I_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + 1$

Démonstration par récurrence que pour tout entier n , $I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!}$.

On définie la propriété $\mathscr{P}(n)$: $I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!}$..

Initialisation :

$I_0 = 1 - e^{-1}$ et $1 - \sum_{k=0}^{0} \frac{e^{-1}}{k!} = 1 - \frac{e^{-1}}{0!} = 1 - e^{-1}$

la propriété $\mathscr{P}(0)$ est donc vérifiée.

Hérédité :

Si la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vérifié alors $I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!}$.

On a vu que : $I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{(n+1)!} e^{-1}$ donc $I_{n-+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!} e^{-1} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!} - \frac{1}{(n+1)!} e^{-1} = 1 - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{e^{-1}}{k!}$

La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vérifiée.

Conclusion :

La propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire à partir de n = 0 elle est donc vérifiée pour tout entier n.

d) $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!} = 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.