Antilles-Guyane 2001

Partie A : Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = x\, e^x$

1° Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

2° Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (a x + b)\, e^x$

75 p 194

Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1)

Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si u + v est solution de (1)

En déduire l'ensemble des solutions de (1)

3° Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\, e^x - x - 2$

1° Déterminer la limite de g en moins l'infini et la limite de g en plus l'infini.

2° Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

3° On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

Vérifier que 0 est l'une de ces solutions

L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$

4° Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs du réel x.

Partie C : Etude de la fonction principale.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)\, e^x$

1° Déterminer la limite de f en moins l'infini et la limite de f en plus l'infini.

(On pourra mettre e^{2x} en facteur)

2° Calculer f '(x) et montrer que f '(x) et g(x) ont le même signe.

Etudier le sens de variation de f

3° Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha^2 + 2\,\alpha)}{4}$ où α est défini dans la partie B.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. On rappelle que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$)

4° Etablir le tableau de variations de f

5° Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)

Partie D : Calcul d'aire Hors programme bac blanc

1° Soit m un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_0^m f(x)\, dx$. (On justifiera la réponse.)

2° a) Calculer $\int_0^m x\, e^x\, dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire $\int_0^m f(x)\, dx$.

3° Calculer la limite de $\int_0^m f(x)\, dxm$ lorsque m tend vers $-\infty$.

CORRECTION

Partie A Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = x e^x$

1° Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = a y$ sont de la forme : $x \longmapsto C e^{ax}$

donc les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ sont de la forme : $x \longmapsto C e^{2x}$

2° Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (a x + b) e^x$

a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

$u'(x) = a e^x + (a x + b) e^x = (a x + a + b) e^x$.

$u'(x) = -2 u(x) = (a x + a + b) e^x - 2 (a x + b) e^x = (a x + a + b + -2 a x - 2 b) e^x = (-a x + a - b) e^x$.

u solution de (1) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) - 2 u(x) = x e^x$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $(-a x + a - b) e^x = x e^x$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $-a x + a - b = x$ car $e^x \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow a = -1 = b$.

On a donc $u(x) = -(x + 1) e^x$.

b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, u + v est solution de (1).

v solution de (2) si et seulement si $v' - 2v = 0$ c'est à dire $v' = v$.

On sait que comme u est solution de (1) on a : $u' - 2u = x e^x$.

On a donc

v solution de (2)

$\Leftrightarrow v' - 2v = 0$

$\Leftrightarrow v' - 2v + u' - 2u = x e^x$

$\Leftrightarrow u' + v' - 2u - 2v = x e^x$

$\Leftrightarrow u + v$ solution de (1).

c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

les solutions de (1) sont donc de la forme u + v où v est une solution de (2) on peut donc dire que les solutions de (1) sont de la forme $x \longmapsto C e^{2x} - (x + 1) e^x$?

3° Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Soit f la solution de (1) qui s'annule en 0.

$f(x) = C e^{2x} - (x + 1) e^x$.

$f(0) = 0 \Leftrightarrow C e^0 - (0 + 1) e^0 = 0 \Leftrightarrow C = 1$. f est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - (x + 1) e^x$.

Partie B Etude d'une fonction auxiliaire Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = 2 e^x - x - 2$.

1° Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2 e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x - 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$g(x) = e^x \left(2 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right)$. On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x}$ on a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x} = 2$.

Comme en plus $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ on peut dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2° Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.

$g'(x) = 2 e^x - 1$.

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x \geq -\ln 2$.

$g(-\ln 2) = 2 \times \frac{1}{2} + \ln 2 - 1 = 1 - \ln 2$.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
signe de g '		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$-1 + \ln 2$	↗	$+\infty$

3° On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles. a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

$g(0) = 2 \times e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$.

b) L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.

g est continue et strictement décroissante sur $[-1{,}6 , -1{,}5]$

$g(-1{,}6) \approx 0{,}0004$ et $g(-1{,}5) \approx -0{,}05$ donc $g(-1{,}5) \leq 0 \leq g(-1{,}6)$

On peut donc dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α dans l'intervalle $[-1{,}6 , -1{,}5]$

4° Déterminer le signe de g (x) suivant les valeurs du réel x.

D'après les variations de la fonction g on a :

$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\alpha , 0]$

x	$-\infty$	α		$-\ln 2$		0	$+\infty$
signe de g '			$-$	0	$+$		
g	$+\infty$	0	↘	$-1 + \ln 2$	↗	0	$+\infty$

Partie C Etude de la fonction principale Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^x$
1° Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur.)

$f(x) = e^{2x}\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x} = 1$.

Comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ on peut dire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$f(x) = e^{2x} - x\,e^x - e^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2° Calculer f '(x) et montrer que f '(x) et g (x) ont le même signe. Etudier le sens de variation de f

$f'(x) = 2\,e^{2x} - e^x - x\,e^x - e^x = 2\,e^{2x} - 2\,e^x - x\,e^x = e^x\,(e^x - x - 2) = e^x\,g(x)$.

On sait que pour tout réel x $e^x > 0$ donc f'(x) est bien du signe de g(x)

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
signe de f '		+	0	−	0	+	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3° Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{2}$ où α est défini dans la partie B. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
On rappelle que $-1{,}6 \le \alpha \le -1{,}5$.)

$g(\alpha) = 0$ donc $2\,e^\alpha - \alpha - 2 = 0$ donc $e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2}$.

$f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)\,e^\alpha = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1)\,\frac{\alpha+2}{2} = \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{4} - \frac{\alpha^2 + 2\alpha + \alpha + 2}{2} =$

$\frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4 - 2\alpha^2 - 6\alpha - 4}{4} = \frac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4} = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$.

$-1{,}6 \le \alpha \le -1{,}5$ donc $(-1{,}5)^2 \le \alpha^2 \le (-1{,}6)^2$ et $-3{,}2 \le 2\alpha \le -3$ donc en ajoutant les inégalités membre à membre on obtient : $2{,}25 - 3{,}2 \le \alpha^2 + \alpha \le 2{,}56 - 3$ On en déduit que : $0{,}11 \le -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4} \le 0{,}2375$

Variante : La fonction $x \longmapsto -\frac{x^2 + 2x}{4}$ est croissante sur $[-1{,}6\,;-1{,}5]$

$-1{,}6 \le \alpha \le -1{,}5$ donc : $0{,}16 \le -\frac{(-1{,}6)^2 + 2(-1{,}6)}{4} \le -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4} \le -\frac{(-1{,}5)^2 + 2(-1{,}5)}{4} \le 0{,}19$. l'encadrement trouvé est de meilleur précision.

4° Etablir le tableau de variations de f

Voir le 2°

5° Tracer la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie D Calcul d'aire 1° Soit m un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_0^m f(x)\,dx$. (On justifiera la réponse.)

Hors programme bac blanc D'après les variations de f on sait que f est positive sur l'intervalle $]-\infty\ , 0]$ donc sur l'intervalle $[m\ , 0\ ]$.

la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de l'axe des abscisses. $\int_m^0 f(x)\,dx$ représente donc l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = m.

En cm^2 l'aire est donc égale à $4 \times \int_m^0 f(x)\,dx$.

2° a) Calculer $\int_m^0 x\,e^x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

$\left.\begin{array}{l} u(x) = x \text{ donc } u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x \text{ et } v(x) = e^x \end{array}\right\}$ donc $\int_m^0 x\,e^x\,dx = [x\,e^x]_m^0 - \int_m^0 e^x\,dx = -m\,e^m - (1 - e^m) = -m\,e^m - 1 + e^m$.

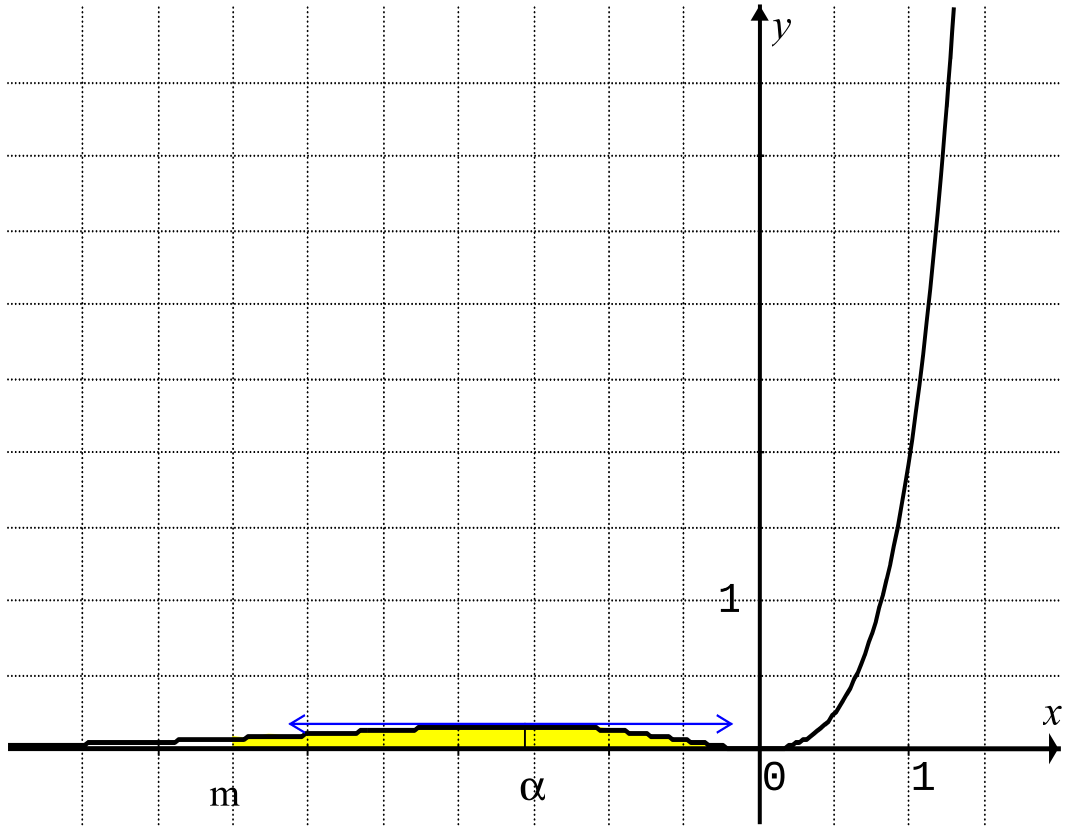
b) En déduire $\int_m^0 f(x)\,dx$.

$\int_m^0 f(x)\,dx = \int_m^0 (e^{2x} - x\,e^x - e^x)\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_m^0 - (-m\,e^m + e^m - 1) - [e^x]_m^0 = \frac{1}{2} - \frac{e^{2m}}{2} + m\,e^m - e^m + 1 - (1 - e^m)$

$= \frac{1}{2} - \frac{e^{2m}}{2} + m\,e^m - e^m + 1 - 1 + e^m = \frac{1}{2} - \frac{e^{2m}}{2} + m\,e^m$

3° Calculer la limite de $\int_m^0 f(x)\,dx$m lorsque m tend vers $-\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ donc $\lim\limits_{m\to-\infty} e^{2m} = \lim\limits_{m\to-\infty} m\,e^m = 0$ et $\lim\limits_{m\to-\infty} -\frac{e^{2m}}{2} + \frac{1}{2} + m\,e^m = \frac{1}{2}$



y
x
1
0
1
m
α