**Réunion juin 2003 9 points Communs à tous les candidats.**

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \dfrac{e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

1° a) Démontrer que la fonction u définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $u(x) = \dfrac{e^x}{x}$ est solution de (E).

b) Démontrer qu'une fonction v définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.
c) En déduire toutes les solutions définies sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de l'équation (E).

2° Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction $f_k$ définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f_k(x) = \dfrac{kx+1}{x}e^x$.

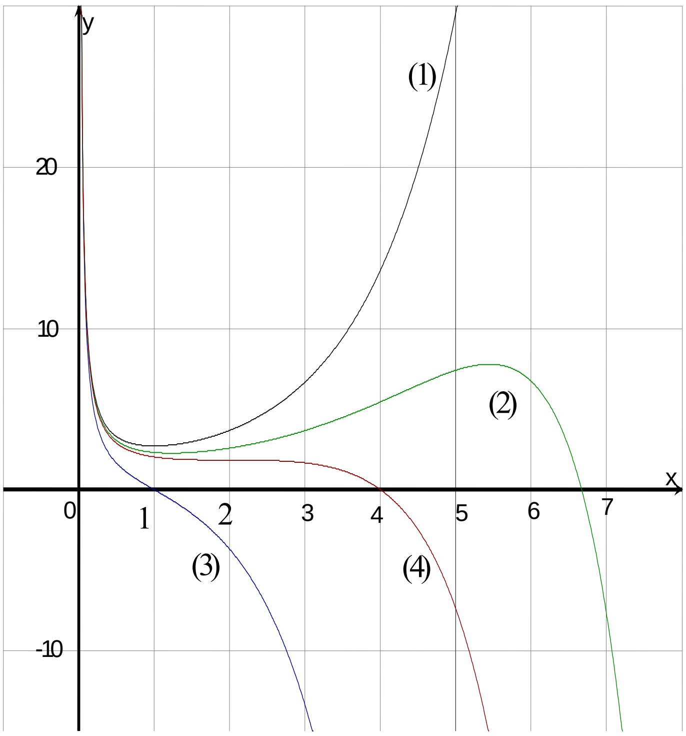
a) Déterminer les limites de $f_k$ en 0 et en $+\infty$.
b) Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de l'équation $f'_k(x) = 0$.
3° On note $C_k$ la courbe représentative de la fonction $f_k$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$
On a tracé sur le graphique ci-joint les courbes $C_{-1}$, $C_{-0,25}$ , $C_{-0,15}$ et $C_0$.
En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).

4° Pour tout réel a strictement positif, on pose $A(a) = \displaystyle\int_{a+1}^{a} \frac{e^x}{x}\,dx$.

a) Interpréter géométriquement A(a).

b) On désigne F une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

En remarquant que $A(a) = F(a+1) - F(a)$ étudier le sens de variations de la fonction qui à tout réel a élément de $]\,0\,;+\infty\,[$ associe le réel A(a).
c) On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre les courbes $C_0$ et (Ox) soit minimale. Comment doit-on procéder ?




**CORRECTION**

1° a) pour tout réel x de ] 0 ; + ∞ [ , $u(x) = \frac{e^x}{x}$ et $u'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x (x-1)}{x^2}$

Donc pour tout réel x de ] 0 , + ∞ [ , $u(x) - u'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{x\,e^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}$.

Donc u est solution de l'équation $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$

b) v solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x de ] 0 , + ∞ [, $v(x) - v'(x) = \frac{e^x}{x^2}$

Pour tout réel x de ] 0 ; + ∞ [, $u(x) - u'(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

Pour tout réel x de ) 0 ; + ∞ [ on a donc :

$v(x) - v'(x) = \frac{e^x}{x^2} \Leftrightarrow v(x) - v'(x) = u(x) - u'(x) \Leftrightarrow (v-u)(x) - (v-u)'(x) = 0$.

On peut donc dire que : v solution de (E) si et seulement si v – u solution de $(E_0)$ : $y - y' = 0$.

c) v – u solution de $(E_0)$ si et seulement si il existe un réel C tel que :

$\forall x \in ]0 ; +\infty[, (v-u)(x) = C\,e^x$

v solution de (E) : $\forall x \in ]0 , +\infty[, v(x) = u(x) + C\,e^x = \frac{e^x}{x} + C\,e^x$.

2° $f_k(x) = \frac{k\,x+1}{x} e^x$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} k\,x + 1 = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{k\,x+1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f_k(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et si $k \neq 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} k\,x + 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et si $k = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} k\,x + 1 = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$.

b) La fonction $x \longmapsto \frac{e^x}{x}$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur ] 0 ; + ∞ [ et elle est définie sur sur ) 0 ; + ∞ ( elle est donc dérivables sur ] 0 ; + ∞ [ et pour tout réel x de ] 0 ; + ∞ [ on a :

$f_k(x) - f_k'(x) = \frac{e^x}{x^2}$ donc $f_k'(x) = f_k(x) - \frac{e^x}{x^2} = \frac{k\,x+1}{x} e^x - \frac{e^x}{x^2} = \frac{k\,x^2 + x - 1}{x^2} e^x$

Pour tout réel x de ] 0 ; + ∞ [ $\frac{e^x}{x^2} > 0$ donc $f_k'(x)$ est du signe de $k\,x^2 + x - 1 = 0$

$f_k'(x) \Leftrightarrow k\,x^2 + x - 1 = 0$

Si $k = 0$ $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. (et $f_k'(x)$ change de signe )

Si $k \neq 0$, $\Delta = 1 + 4\,k$

Si $k < -\frac{1}{4}$. On a $\Delta < 0$ donc l'équation $f_k'(x) = 0$ n'a pas de solution.

Si $k = -\frac{1}{4}$. On a $\Delta = 0$ donc l'équation $f_k'(x) = 0$ a une solution réelle dans ] 0 ; + ∞ [, $-\frac{b}{2\,a} = 2$ (et $f_k'$ ne change pas de signe)

Si $-\frac{1}{4} < k < 0$. On a $\Delta > 0$ et l'équation $f_k'(x) = 0$ admet deux solutions réelles

Etude du signe de ces deux solutions

La somme de ces solutions est $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{k}$ et le produit est $\frac{c}{a} = -\frac{1}{k}$.

Les solutions sont donc de même signe et positives.

L'équation $k\,x^2 + x - 1 = 0$ a donc deux solutions dans ] 0 ;+ ∞ [.

3° (1) k = 0 ($f_k'$ s'annule une fois et change de signe)

(2) $k = -1 < -\frac{1}{4}$ $f_k'$ s'annule deux fois et change de signe.

(3) k = – 0,25 ($f_k'$ s'annule une fois et ne change pas de signe)

(4) k = –0,15 > – 0,25 ($f_k'$ ne s'annule pas et ne change pas de signe)

4° (pas au programme du bac blanc)

a) A(a) représente l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}$ représentation graphique de u et les droites d'équation : « y = 0 », « x = a » et « x = a + 1 »

b) pour tout réel a > 0 :

$$A'(a) = F'(a+1) - F'(a) = \frac{e^{a+1}}{a+1} - \frac{e^a}{a} = \frac{e^a \times e \times a - e^a \times (a+1)}{a\,(a+1)} = e^a \times \frac{e \times a - a - 1}{a\,(a+1)}.$$

Pour tout réel a > 0, $\frac{e^a}{a\,(a+1)} > 0$ donc A '(a) est du signe de e a – a – 1.

$e\,a - a - 1 \geq 0 \Leftrightarrow a\,(e-1) \geq 1 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{e-1}$ ( car e > 1).

| a | $0$ | | $\frac{1}{e-1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de A ' | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| A | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

c) A(a) est minimale pour $a = \frac{1}{e-1}$.

On choisi donc la bande limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équation « y = 0 », « $x = \frac{1}{e-1}$ » et « $x = 1 + \frac{1}{e-1}$ »