France juin 2005

EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{3\,e^{x/4}}{2 + e^{x/4}}$

a) Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\,e^{-x/4}}$

b) Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Etudier les variations de la fonction f.

Partie B

1° On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée g(t). On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne te temps, exprimé en années. L'unité choisie pour g(t) est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty\,[$, de l'équation différentielle (E_l) $y' = \dfrac{y}{4}$

a) Résoudre l'équation différentielle (E1).

b) Déterminer l'expression de g(t) lorsque, à la date t = 0, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire g(0) = 1.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note u(t) le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{(u(t))^2}{12} & \text{pour tout nombre réel t positif ou nul} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a u(t) > 0. On considère, sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(E3) : \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel t positif ou nul} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

CORRECTION

EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats

Partie A Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{3\,e^{x/4}}{2+e^{x/4}}$ a) Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1+2\,e^{-x/4}}$

a) Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{3\,e^{x/4}}{2+e^{x/4}} = \dfrac{3\,e^{x/4}}{e^{x/4}\times(2\,e^{-x/4}+1)} = \dfrac{3}{1+2\,e^{-x/4}}$

b) Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x/4} = \lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{1+2\times 0} = 3.$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x/4} = \lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3\times 0}{2+0} = 0$$

c) Etudier les variations de la fonction f.

$$f'(x) = -\frac{3\times\left(-\frac{2}{4}\,e^{-x/4}\right)}{(1+2\,e^{-x/4})^2} = \boxed{\frac{3}{2}\times\frac{e^{-x/4}}{(1+2\,e^{-x/4})^2}}$$

Pour tout réel x , $\dfrac{e^{-x/4}}{(1+2\,e^{-x/4})^2} > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1° On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée g(t). On définit ainsi une fonction g de l'intervalle [0 ; + ∞ [dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne te temps, exprimé en années. L'unité choisie pour g(t) est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur I'intervalle [0 ; + ∞ [, de l'équation différentielle (E_1) $y' = \dfrac{y}{4}$

a) Résoudre l'équation différentielle (E1).

Les solutions de (E1) sont de la forme : $t \longmapsto k\,e^{t/4}$ où k est une constante.

b) Déterminer l'expression de g(t) lorsque, à la date t = 0, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire g(0) = 1.

b) Pour tout réel t, $g(t) = t \longmapsto k\,e^{t/4}$ où k est une constante.

$g(0) = 1 \Leftrightarrow k\,e^{0/4} = 1 \Leftrightarrow k = 1$.

On a alors pour tout réel t, $g(t) = t \longmapsto e^{t/4}$

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

$$g(t) \geq 3 \Leftrightarrow e^{t/4} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{t}{4} \geq \ln 3 \Leftrightarrow t \geq 4\ln 3$$

$4\ln 3 \approx 4{,}39$ donc la population dépassera les 300 rongeurs pour la première fois après 5 ans

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note u(t) le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions : (E2) :

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{(u(t))^2}{12} & \text{pour tout nombre réel t positif ou nul} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u. a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a u(t) > 0. On considère, sur l'intervalle [0 ; + ∞ [, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions (E3) :

$$\begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel t positif ou nul} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

la fonction u satisfait aux conditions (E2) si et seulement si $\begin{cases} u' = \dfrac{u}{4} - \dfrac{u^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$

On divise par u^2 non nul on obtient

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u}{4} - \dfrac{u^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u'}{u^2} = \dfrac{1}{4u} - \dfrac{1}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases} \text{ comme } h = \frac{1}{u} \text{ on a } h' = -\frac{u'}{u^2} \text{ et}$$

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{4u} - \dfrac{1}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -h' = \dfrac{1}{4}h - \dfrac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h' = -\dfrac{1}{4}h + \dfrac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

ce qui signifie bien que la fonction h satisfait aux conditions (E3).

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ sont de la forme : $t \longmapsto k\,e^{-t/4} - \frac{1/12}{-1/4}$

Pour tout réel t, $h(t) = \boxed{k\,e^{-t/4} + \frac{1}{3}}$

$h(0) = 1 \Leftrightarrow k\,e^{0} + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 1 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{2}{3}}$.

On a donc pour tout réel t, $h(t) = \frac{2}{3}\,e^{-t/4} + \frac{1}{3}$ et $u(t) = \frac{1}{\frac{2}{3}e^{-t/4} + \frac{1}{3}} = \boxed{\frac{3}{2\,e^{-t/4} + 1}} = f(t)$

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers + ∞ ?

$\lim_{x \to +\infty} u(t) = \lim_{x \to +\infty} f(t) = 3$

La taille de la population de rongeurs tend vers 300.