PONDICHERY, 1994

On se propose de trouver une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété :

$$\text{pour tout } x > 0\ ,\ x\,f'(x) - 3\,f(x) = 3\ln x \qquad \text{(E)}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1° Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout x réel, $x\,P'(x) - 3\,P(x) = 0$.

2° Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ telle que $f(1) = 0$; soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par la relation $f(x) = x^3\,h(x)$.

a) Calculer $h(1)$.

b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$.

c) Montrer que f vérifie la propriété (E) si et seulement si, pour tout $x>0$, $h'(x) = \dfrac{3}{x^4}\ln x$.

d) On suppose que f vérifie la propriété (E).

Montrer que h est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{3}{t^4}\ln t\,dt$.

Déterminer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

3° Montrer qu'il existe une fonction f et une seule, solution du problème posé, et en donner l'expression.

CORRECTION

1° $P(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ et $P'(x) = 3 a x^2 + 2 b x + c$

$x P'(x) - 3 P(x) = 0 \Leftrightarrow x (3 a x^2 + 2 b x + c) - 3 (a x^3 + b x^2 + c x + d) = 0$

$\Leftrightarrow 3 a x^3 + 2 b x^2 + c x - 3 a x^3 - 3 b x^2 - 3 c x - 3 d = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 b - 3 b = 0 \\ c - 3 c = 0 \\ -3 d = 0 \end{cases}$ $\quad P(x) = a x^3$

2° $f(x) = x^3 \times h(x)$

a) $f(1) = 1^3\, h(1)$ donc $h(1) = 0$.

b) $f'(x) = 3 x^2 \times h(x) + x^3\, h'(x)$.

On a :

f vérifie (E)

$\Leftrightarrow \forall x \in\ ]0, +\infty[,\ x f'(x) - 3 f(x) = 3 \ln x$

$\Leftrightarrow \forall x \in\ ]0, +\infty[,\ x (3 x^2 \times h(x) + x^3 h'(x)) - 3 x^3 h(x) = 3 \ln x$

$\Leftrightarrow \forall x \in\ ]0, +\infty[,\ 3 x^3 h(x) + 3 x^3 h'(x) - 3 x^4 h(x) = 3 \ln x$

$\Leftrightarrow \forall x \in\ ]0, +\infty[,\ h'(x) = \dfrac{3 \ln x}{x^4}$

on peut donc dire : f vérifie (E) si et seulement si h est une primitive de la fonction : $x \longmapsto \dfrac{3 \ln x}{x^4}$

d) Pour déterminer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{3}{x^4} \ln x$ on utilise une intégration par partie (hors programme bac blanc)

$u(t) = \ln t$ donc $u'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = \dfrac{3}{t^4}$ et $v(t) = 3\, \dfrac{t^{-4+1}}{-4+1} = -\dfrac{1}{t^3}$

$$\int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t \, dt = \left[\ln t \times \left(-\frac{1}{t^3}\right)\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t^3}\right) \times \frac{1}{t}\, dt = -\frac{\ln x}{x^3} + \left[\frac{t^{-4+1}}{-4+1}\right]_1^x = -\frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{3 x^3} + \frac{1}{3}$$

3° f solution du problème si et seulement si f est définie sur $[\,0\,; +\infty\,[$ par : $f(x) = x^3 \times h(x)$ avec h primitive de $x \longmapsto \dfrac{3 \ln x}{x^4}$ et $h(1) = 0$ c'est à dire $h : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t \, dt$.

La seule solution du problème est donc la fonction f définie sur $]\,0\,; +\infty\,[$ par :

$f(x) = x^3 \left(-\dfrac{\ln x}{x^3} - \dfrac{1}{3 x^3} + \dfrac{1}{3}\right) = -\ln x - \dfrac{1}{3} + \dfrac{x^3}{3}$.