

Liban mai 2006

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points

$A(2; 1; 3)$, $B(-3; -1; 7)$ et $C(3; 2; 4)$.

1° Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2° Soit (d) la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

a) Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

3° Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC).

a) Montrer que H est le barycentre de $(A; -2)$, $(B; -1)$ et $(C; 2)$.

b) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1 , des points M de l'espace tels que $(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}) \cdot (\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$

En préciser les éléments caractéristiques.

c) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2 , des points M de l'espace tels que:

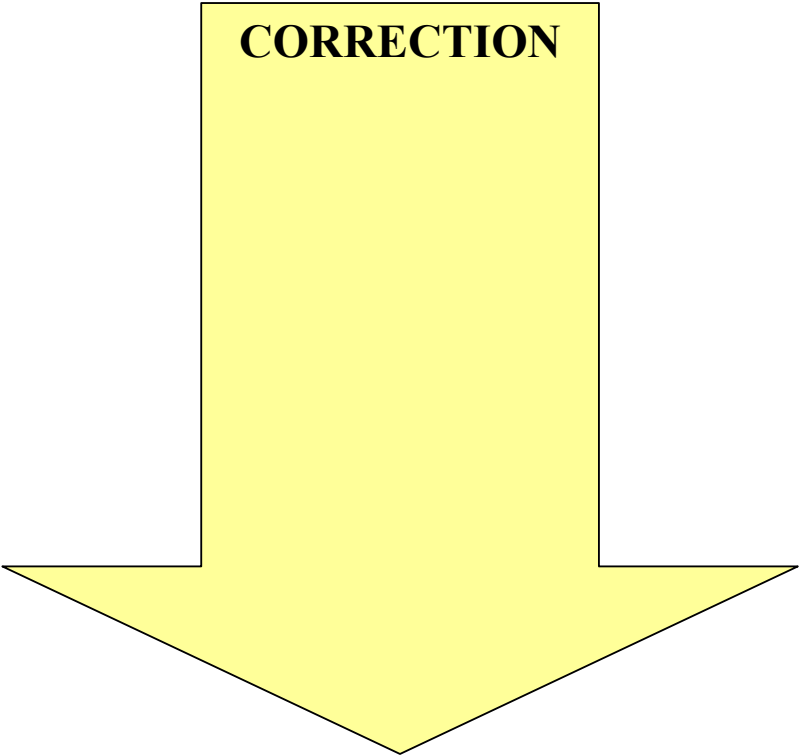
$$\| -2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29}$$

En préciser les éléments caractéristiques.

d) Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 .

e) Le point S $(-8; 1; 3)$ appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 .

CORRECTION



Liban mai 2006 EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(2; 1; 3)$, $B(-3; -1; 7)$ et $C(3; 2; 4)$. 1° Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3-2 \\ -1-1 \\ 7-3 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2° Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ a) Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).

Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-5) + (-3) \times (-2) + 1 \times 4 = -10 + 6 + 4 = 0 \text{ donc } \vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \text{ donc (d) } \perp (AB)$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + (-3) \times 1 + 1 \times 1 = 2 - 3 + 1 = 0 \text{ donc } \vec{u} \perp \overrightarrow{AC} \text{ donc (d) } \perp (AC).$$

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

$\vec{u}$ est un vecteur normal de (ABC) donc une équation du plan (ABC) est de la forme :

$$2x - 3y + z = 2x_A - 3y_A + z_A \text{ c'est à dire } 2x - 3y + z = 2 \times 2 - 3 \times 1 + 3$$

$$\text{Equation de (ABC) : } \boxed{2x - 3y + z = 4}$$

3° Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC). a) Montrer que H est le barycentre de (A ; -2), (B ; -1) et (C ; 2).

Soit G le barycentre de (A ; -2), (B ; -1) et (C ; 2).

$x_G = \frac{-2 \times 2 - 1 \times (-3) + 2 \times 3}{-2 - 1 + 2} = -5$	$y_G = \frac{-2 \times 1 - 1 \times (-1) + 2 \times 2}{-1} = -3$	$z_G = \frac{-2 \times 3 - 1 \times 7 + 2 \times 4}{-1} = 5$
--	--	--

G est le barycentre de (A ; -2), (B ; -1) et (C ; 2) donc $G \in (ABC)$

Le point G est-il un point de (d)

$$\begin{cases} -5 = -7 + 2t \\ -3 = -3t \\ 5 = 4 + t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \text{ donc G est un point de (d). G est le point d'intersection de (d) et de (ABC) donc } G = H$$

b) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1 , des points M de l'espace tels que $(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$
En préciser les éléments caractéristiques.

H est le barycentre de $\{(A; -2), (B; -1) \text{ et } (C; 2)\}$, donc pour tout point M,

$$-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (-2 - 1 + 2)\overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{MH}$$

$$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB}$$

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow -\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{CB}$$

Donc Γ_1 est donc le plan perpendiculaire à (BC) passant par H.

c) Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2 , des points M de l'espace tels que: $\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \sqrt{29}$
En préciser les éléments caractéristiques.

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \| -\overrightarrow{MH} \| = \sqrt{29}$$

Γ_2 est la sphère de centre H de rayon $\sqrt{29}$

d) Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 .

Le plan Γ_1 passe par le centre de la sphère Γ_2 donc l'intersection de Γ_1 et de Γ_2 est un cercle de centre H de rayon $\sqrt{29}$

e) Le point S (-8 ; 1 ; 3) appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 .

$$H(-5; -3; 5) \text{ donc } \overrightarrow{SH} \begin{pmatrix} -5+8 \\ -3-1 \\ 5-3 \end{pmatrix} \text{ et } SH = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29} \text{ donc } S \in \Gamma_2$$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3+3 \\ 2+1 \\ 4-7 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \times 6 + (-4) \times 3 + 2 \times (-3) = 18 - 12 - 6 = 0 \text{ donc } S \in \Gamma_1.$$

Le point S est bien à l'intersection de Γ_1 et Γ_2