Polynésie 9 juin 2005 Exercice 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;

On considère les points A(3 ; 1 ; 3) et B(- 6 ; 2 ; 1).

Le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne $x + 2y + 2z = 5$.

1° L'ensemble des points M de l'espace tels que $\| 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \| = 2$ est :

a) un plan de l'espace b) une sphère c) l'ensemble vide.

2° Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ sont :

a) $\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ b) $\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ c) $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

3° La sphère de centre B et de rayon 1 :

a) coupe le plan $\mathscr{P}$ suivant un cercle ; b) est tangente au plan $\mathscr{P}$; c) ne coupe pas le plan $\mathscr{P}$.

4° On considère la droite 5e de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 , 2 , – 1) et la droite $\mathscr{D}'$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$ Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont :

a) coplanaires et parallèles b) coplanaires et sécantes c) non coplanaires

5° L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

a) la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} - t \\ y = 3 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + t \end{cases}$

b) le plan d'équation cartésienne $9x - y + 2z + 11 = 0$.

c) le plan d'équation cartésienne $x + 7y - z - 7 = 0$.

CORRECTION

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; On considère les points A(3 ; 1 ; 3) et B(- 6 ; 2 ; 1).
Le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne x + 2 y + 2 z = 5.

1° L'ensemble des points M de l'espace tels que $\| 4\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \| = 2$ est :

a) un plan de l'espace **b) une sphère** **c) l'ensemble vide.**

Soit G le barycentre de {(A , 4), (B , – 1)}. $4\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = (4-1)\,\overrightarrow{MG} = 3\,\overrightarrow{MG}$

$\| 4\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \| = 2 \Leftrightarrow MG = \frac{2}{3}$ L'ensemble cherché est donc une sphère.

2° Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ sont :

a) $\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ **b) $\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$** **c) $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$**

Réponse a) : $\frac{11}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{15}{3} = 5$ donc la réponse a) est peut être la bonne.

On a alors $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \frac{11}{3} - 3 \\ \frac{1}{3} - 1 \\ \frac{1}{3} - 3 \end{pmatrix}$ c'est à dire $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires donc la réponse a) ne peut être la bonne.

Réponse b) $\frac{8}{3} + \frac{2}{3} + \frac{14}{3} = \frac{24}{3} = 8 \neq 5$ donc la réponse b) ne peut être la bonne.

Réponse c) $\frac{7}{3} - \frac{2}{3} + \frac{10}{3} = \frac{15}{3} = 5$ la réponse c) est peut-être la bonne

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \frac{7}{3} - 3 \\ -\frac{1}{3} - 1 \\ \frac{5}{3} - 3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ On sait que $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{AH} = -\frac{2}{3}\vec{n}$ la réponse c) est donc bonne.

3° La sphère de centre B et de rayon 1 :

a) coupe le plan $\mathscr{P}$ suivant un cercle ; **b) est tangente au plan $\mathscr{P}$;** **c) ne coupe pas le plan $\mathscr{P}$.**

$d(B, \mathscr{P}) = \frac{| x_B + 2\,y_B + 2\,y_B - 5 |}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|-6+4+2-5|}{3} = \frac{5}{3} < 1$ donc la réponse a) est la bonne.

4° On considère la droite 5e de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 , 2 , – 1) et la droite $\mathscr{D}$ ' d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + 2\,t \\ y = 3 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$ Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ ' sont :

a) coplanaires et parallèles **b) coplanaires et sécantes** **c) non coplanaires.**

$\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ ' $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ ' ne sont pas parallèles. Reste à démontrer que les deux droites sont sécantes

la droite $\mathscr{D}$ ' a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 + 2\,s \\ z = 3 - s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$ Il faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} x = 3 + 2\,t \\ y = 3 + t \\ z = t \\ x = 3 + s \\ y = 1 + 2\,s \\ z = 3 - s \end{cases} \text{ ou plus simplement le système } \begin{cases} 3 + 2\,t = 3 + s \\ 3 + t = 1 + 2\,s \\ t = 3 - s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2\,t \\ 3 + t = 1 + 4\,t \\ t = 3 - 2\,t \end{cases} \Leftrightarrow s\begin{cases} s = 2\,t \\ t = \dfrac{2}{3} \\ t = 1 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ ' n'ont pas de point en commun. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ ' ne sont pas parallèles et elles ne sont pas sécantes elle ne sont donc pas coplanaires.

Variante

$\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ '

A(3 , 1 ; 3) est un point de dr C(3 , 3 ; 0) est un point de $\mathscr{D}$ ' : $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-1 \\ 0-3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ ' sont coplanaires si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont coplanaires c'est à dire si et seulement si il existe α et β réels tels que $\overrightarrow{AN} = \alpha\,u + \beta\,\vec{v}$

$$\overrightarrow{AN} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha + 2\,\beta \\ 2 = 2\,\alpha + \beta \\ -3 = -\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,\beta = -3 \quad (L1 + L3) \\ 2 = 2\,\alpha + \beta \quad (L2) \\ \alpha = \beta + 3 \quad (L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ 2\,\alpha = 2 - \beta \\ \alpha = -1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 2 \\ 2 \times 2 = 2 + 1 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc les vecteurs ne sont pas coplanaires donc les droites ne sont pas coplanaires.

5° L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est : A(3 ; 1 ; 3) et B(– 6 ; 2 ; 1).

a) la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} - t \\ y = 3 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + t \end{cases}$

b) le plan d'équation cartésienne 9 x – y + 2 z + 11 = 0.

c) le plan d'équation cartésienne x + 7 y – z – 7 = 0.

I milieu de [AB] donc $I\left(\dfrac{3-6}{2}, \dfrac{1+2}{2}, \dfrac{3+1}{2}\right)$ donc $I\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}, 2\right)$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6-3 \\ 2-1 \\ 1-3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA}$ est un vecteur normal du plan médiateur de [AB] qui a donc pour équation :

$$9\,x - y + 2\,z = 9 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} + 2 \times 2 \Leftrightarrow 9\,x - y + 2\,z = -\frac{30}{2} + 4 = 0 \Leftrightarrow 9\,x - y + 2\,z + 11 = 0$$

Variante

$MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = (x+6)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 6\,x + 9 + y^2 - 2\,y + 1 + z^2 - 6\,z + 9 = x^2 + 12\,x + 36 + y^2 - 4\,y + 4 + z^2 - 2\,z + 1$

$\Leftrightarrow -6\,x + 9 - 2\,y + 1 - 6\,z + 9 = 12\,x + 36 - 4\,y + 4 - 2\,z + 1$

$\Leftrightarrow 18\,x - 2\,y + 4\,z + 41 - 19 = 0 \Leftrightarrow 9\,x - y + 2\,z + 11 = 0$