Antilles guyane juin 2005. Exercice 4 6 points Commun à tous les candidats

partie A.

Soit [KL] un segment de l'espace ; on note I son milieu.

On appelle plan médiateur de [KL] le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).

Démontrer que le plan médiateur de [KL] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.

partieB.

Ici l'espace est muni d'un repère orthormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ;

on considère les points A $(4 ; 0 ; -3)$, B $(2 ; 2 ; 2)$, C $(3 ; -3 ; -1)$, D $(0 ; 0 ; -3)$.

1° Démontrer que le plan médiateur de [AB] a pour équation : $4x - 4y - 10z - 13 = 0$.

On admet pour la suite que les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations

$2x - 10y - 6z - 7 = 0$ et $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

2° Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.

3° En utilisant la partie A montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E. Quel est le rayon de cette sphère ?

# CORRECTION

**partie A. Soit [KL] un segment de l'espace ; on note I son milieu. On appelle plan médiateur de [KL] le plan perpendiculaire en I à la droite (KL). Démontrer que le plan médiateur de [KL] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.**

I est dans le plan médiateur de [KL] et est aussi équidistant de K et de L.
Soit M ≠ I, un point appartenant au plan médiateur de [KL]. La droite (MI) est contenue dans le plan médiateur et la droite (KL) est orthogonale à ce plan donc les droites (MI) et (KL) sont orthogonales.
Dans le plan (MKL) la droite (IM) passe par le milieu de [KL] et est perpendiculaire à [Kl) c'est donc la médiatrice du segment [KL] et donc tous les points de (MI) sont équidistant de K et de L.
M est bien équidistant de K et de L.
Réciproquement : Soit M ≠ I un point équidistant de K et de L.
Dans le plan (MKL) la droite (MI) est alors la médiatrice du segment [KL] elle est donc perpendiculaire à (KL).
le plan médiateur de [KL] est la plan passant par I orthogonal à (KL) et (MI) ⊥ (KL) donc M est sur le plan médiateur.
Le plan médiateur de [KL] est donc bien l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.
variante 1 : avec un produit scalaire.
Soit $\mathscr{P}$ la plan médiateur de [KL]. $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{KL} = 0$
$MK = ML \Leftrightarrow MK^2 = ML^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{ML} \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{ML}) \cdot (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{LK} \cdot (2\ \overrightarrow{MI}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow m \in \mathscr{P}$.
Variante 2 Analytiquement. (plus calculatoire)
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.
$K(x_K, y_K, z_K)$ et $L(x_L, y_L, z_L)$ On a alors $I\left(\frac{x_K + x_L}{2}, \frac{y_K + y_L}{2}, \frac{z_K + z_L}{2}\right)$

$M(x, y, z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{KL} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x_L + x_K}{2} - x\right)(x_K - x_L) + \left(\frac{y_L + y_K}{2} - y\right)(y_K - y_L) + \left(\frac{z_L + z_K}{2} - z\right)(z_K - z_L) = 0$
$\Leftrightarrow (x_L + x_K - 2x)(x_K - x_L) + (y_L + y_K - 2y)(y_L + y_K) + (z_L + z_K - 2z)(z_L + z_K) = 0$
$\boldsymbol{\Leftrightarrow x_K^2 - x_L^2 - 2\,x\,x_K + 2\,x\,x_L + y_K^2 - y_L^2 - 2\,y\,y_K + 2\,y\,y_L + z_K^2 - z_L^2 - 2\,z\,z_K + 2\,z\,z_L = 0}$
$MK = ML \Leftrightarrow MK^2 = ML^2 \Leftrightarrow (x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 + (z - z_K)^2 = (x - x_L)^2 + (y - y_L)^2 + (z - z_L)^2 \Leftrightarrow$
$x^2 + x_K^2 - 2\,x_K\,x + y^2 - 2\,y_K\,y + y_K^2 + z^2 + z_K^2 - 2\,z_K\,z = x^2 + x_L^2 - 2\,x_L\,x + y^2 - 2\,y_L\,y + y_L^2 + z^2 + z_L^2 - 2\,z_L\,z$
$\Leftrightarrow x_K^2 - 2\,x_K\,x - 2\,y_K\,y + y_K^2 + z_K^2 - 2\,z_K\,z - x_L^2 + 2\,x_L\,x + 2\,y_L\,y - y_L^2 - z_L^2 + 2\,z_L\,z = 0$
$\boldsymbol{\Leftrightarrow x_K^2 - x_L^2 - 2\,x\,x_K + 2\,x\,x_L + y_K^2 - y_L^2 - 2\,y\,y_K + 2\,y\,y_L + z_K^2 - z_L^2 - 2\,z\,z_K + 2\,z\,z_L = 0}$
On retrouve bien la même équation. On peut donc dire que $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points équidistant de K et L.

**PartieB. Ici l'espace est muni d'un repère orthormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère les points A (4 ; 0 ; – 3), B (2 ; 2 ; 2), C (3 ; – 3 ; – 1), D (0 ; 0 ; – 3).1° Démontrer que le plan médiateur de [AB] a pour équation : 4 x – 4 y – 10 z – 13 = 0.**
**On admet pour la suite que les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations 2 x – 10 y – 6 z – 7 = 0 et 3 x – 3 y + 2 z – 5 = 0.**

On note $\mathscr{P}_1$ le plan médiateur de [AB] et I le milieu de [AB].
On a $I\left(\frac{4+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{-3+2}{2}\right)$ c'est à dire $I\left(3, 1, -\frac{1}{2}\right)$

$M \in \mathscr{P}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(2 - 4) + (y - 1)(2 - 0) + \left(z + \frac{1}{2}\right)(2 + 3) = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 6 + 2y - 2 + 5z + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow -2x + 2y + 5z + \frac{13}{2} = 0 \Leftrightarrow 4x - 4y - 10z + 13 = 0.$

**2° Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.**

$$\begin{cases} 4x - 4y - 10z - 13 = 0 \\ 2x - 10y - 6z - 7 = 0 \\ 3x - 3y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 16y + 2z + 1 = 0 \\ 24y + 22z + 11 = 0 \end{cases}$$

L1 – 2 L2 : $4x - 4y - 10z - 13 - 4x + 20y + 12z + 14 = 0 \Leftrightarrow 16y + 2z + 1 = 0$
3 L2 – 2 L3 : $6x - 30y - 18z - 21 - 6x + 6y - 4z + 10 = 0 \Leftrightarrow -24y - 22z - 11 = 0$

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 16y + 2z + 1 = 0 \\ 24y + 22z + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 \times 0 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 5 = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad E\left(2, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

11 L2 – L3 : $176y - 22z + 11 - 24y - 22z - 8 = 0 \Leftrightarrow y = 0$

3 L2 – 2 L3 : $48y + 6z + 3 - 48y - 44z - 22 = 0 \Leftrightarrow -38z - 19 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{19}{38} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$

**3° En utilisant la partie A montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E. Quel est le rayon de cette sphère ?**

les coordonnées de E vérifient l'équation $4x - 4y - 10z - 13 = 0$ donc E est sur le plan médiateur de [AB] donc EA = EB.

les coordonnées de E vérifient l'équation $2x - 10y - 6z - 7 = 0$ donc E est sur le plan médiateur de [BC] donc EB = EC.

les coordonnées de E vérifient l'équation $3x - 3y + 2z - 5 = 0$ donc E est sur le plan médiateur de [CD]

Donc A, B, C et D sont sur une sphère de centre E de rayon EA = EB = EC = ED