

Centre étranger juin 2005 EXERCICE 3 5 points

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB = AC = AD = a$. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

1° Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD).

On pourra par exemple calculer $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC}$.)

2° En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.

3° On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de $[BC]$.

a) Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG.

b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 2 \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

4° Soit H le symétrique de A par rapport à G.

a) Démontrer que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.

b) Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$.

c) En déduire que $HC = HD$.

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est : $V = \frac{1}{3} b h$.

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB = AC = AD = a$. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD. 1° Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD).

On pourra par exemple calculer $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC}$.

(AB) est orthogonale aux droites (AC) et (AD) dc elle est orthogonale au plan (BCD) et à la droite (CD).

A_1 est le centre de gravité du triangle BCD donc $3 \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$= \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} \text{ car } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AD}$$

$$= -\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} = 0$$

$$\text{De même : } 3 \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2 + a^2 = 0$$

La droite (AA_1) est orthogonale aux droite (CD) et (BC) elle est donc orthogonale au plan (BCD)

Variante analytique

On se place dans le repère (A; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) où $\vec{i} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AC}$ et $\vec{k} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AD}$.

Le repère est orthonormal on peut donc calculer des produits scalaires et des distances.

A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(0, a, 0) et D(0, 0, a)

$$A_1 \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3} \right) \text{ On a : } \overrightarrow{AA_1} \begin{pmatrix} a/3 \\ a/3 \\ a/3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0-a \\ a-0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 0 \\ 0-a \\ a-0 \end{pmatrix} \text{ et donc :}$$

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} = 0 \dots$$

2° En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.

La droite (AD) est orthogonale au plan (ABC) donc [AD] est la hauteur issue de D du tétraèdre ABCD

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times AD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times AC \times AD = \frac{a^3}{6}$$

La droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD) donc $[AA_1]$ est la hauteur issue de A du tétraèdre ABCD.

$$BC = CD = BD = a\sqrt{2}$$

$$\text{Le triangle BCD est équilatéral et donc } \mathcal{A}(BCD) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \times a\sqrt{2} \times a\sqrt{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}(BCD) \times AA_1 = \frac{1}{3} \times \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \times AA_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} AA_1$$

$$\text{On a donc : } \frac{a^3}{6} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \times AA_1 \text{ donc } AA_1 = \frac{a^3}{6} \times \frac{6}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{a \sqrt{3}}{3}$$

Ici on impose la méthode il n'y a donc pas de variante analytique possible.

3° On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de [BC].

a) Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG.

G bary	A	B	C	D
	1	1	1	1

donc par associativité du barycentre on a

G bary	A	A_1
	1	3

1 et 3 sont de même signe donc $G \in [AA_1]$

Variante analytique

$$\text{coordonnées de G } \left(\frac{0+a+0+0}{4}, \frac{0+0+a+0}{4}, \frac{0+0+0+a}{4} \right) \text{ donc } G \left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4} \right)$$

$$\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} a/4 \\ a/4 \\ a/4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AA_1} \begin{pmatrix} a/3 \\ a/3 \\ a/3 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AA_1} \text{ donc } G \in [AA_1]$$

b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = 2 \|\vec{MB} + \vec{MC}\|$

G bary	A	B	C	D
	1	1	1	1

$$\text{donc } \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = (1 + 1 + 1 + 1) \vec{MG} = 4 \vec{MG}$$

On a : $\vec{MB} + \vec{MC} = 2 \vec{MI}$ où I est le milieu de [BC]

On a donc :

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = 2 \|\vec{MB} + \vec{MC}\| \Leftrightarrow \|4 \vec{MG}\| = 2 \|2 \vec{MI}\| \Leftrightarrow MG = MI.$$

L'ensemble cherché est le plan médiateur de [GI]

Variante analytique (très calculatoire et peu intéressante ici)

$$M(x, y, z). \text{ On a alors : } \vec{MA} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{MB} \begin{pmatrix} x-a \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix}, \vec{MC} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-a \\ z-0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{MD} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-a \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = 2 \|\vec{MB} + \vec{MC}\| \Leftrightarrow \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\|^2 = 4 \|\vec{MB} + \vec{MC}\|^2$$

$$\Leftrightarrow (x+x-a+x+x)^2 + (y+y+y-a+y)^2 + (z+z+z+z-a)^2 = 4((x-a+x)^2 + (y+y-a)^2 + (z+z)^2)$$

$$\Leftrightarrow (4x-a)^2 + (4y-a)^2 + (4z-a)^2 = 4((2x-a)^2 + (2y-a)^2 + (2z-a)^2) \Leftrightarrow 1$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 8ax + a^2 + 16y^2 - 8ay + a^2 + 16z^2 - 8az + a^2 = 4(4x^2 - 4ax + a^2 + 4y^2 - 4ay + a^2 + 4z^2 - 4az + a^2)$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 8ax + 16y^2 - 8ay + 16z^2 - 8az + 3a^2 = 16x^2 - 16ax + 16y^2 - 16ay + 16z^2 - 16az + 12a^2$$

$$\Leftrightarrow 8ax + 8ay + 8az - 9a^2 = 0$$

L'ensemble cherché est le plan d'équation " $8ax + 8ay + 8az - 9a^2 = 0$ "

4° Soit H le symétrique de A par rapport à G. a) Démontrer que $4\vec{GA} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{BA}$.

$$4\vec{GA} = \vec{AA} + \vec{BA} + \vec{CA} + \vec{DA} \text{ donc } 4\vec{GA} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{DA} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AB}$$

Variante analytique

$$\text{On pose } \vec{V} = 4\vec{GA} + \vec{AC} + \vec{AD} \text{ on a alors } \vec{V} \begin{pmatrix} 4 \times \left(-\frac{a}{4}\right) + 0 + 0 \\ 4 \times \left(-\frac{a}{4}\right) + a + 0 \\ 4 \times \left(-\frac{a}{4}\right) + 0 + a \end{pmatrix} \text{ c'est à dire } \vec{V} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc bien $\vec{V} = \vec{BA}$

b) Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \vec{DC} \cdot \vec{BA}$.

$$HC^2 - HD^2 = \vec{HC} \cdot \vec{HC} - \vec{HD} \cdot \vec{HD} = (\vec{HC} - \vec{HD}) \cdot (\vec{HC} + \vec{HD}) = \vec{DC} \cdot (\vec{HC} + \vec{HD})$$

$$A \text{ est le milieu de [HG] donc } \vec{HC} + \vec{HD} = \vec{HA} + \vec{AC} + \vec{HA} + \vec{AD} = 2\vec{HA} + \vec{AC} + \vec{AD} = 4\vec{GA} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AB}$$

$$\text{On a bien } HC^2 - HD^2 = \vec{DC} \cdot \vec{BA}.$$

Variante analytique. (peu intéressante)

$$\text{Coordonnées de H : } \vec{AH} = 2\vec{AG} \text{ donc } H \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right)$$

$$\vec{HC} \begin{pmatrix} 0-a/2 \\ a-a/2 \\ a-a/2 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{HC} \begin{pmatrix} -a/2 \\ a/2 \\ -a/2a \end{pmatrix} \text{ et } \vec{HD} \begin{pmatrix} 0-a/2 \\ 0-a/2 \\ a-a/2 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{HD} \begin{pmatrix} -a/2 \\ -a/2 \\ a/2a \end{pmatrix}$$

$$HC^2 - HD^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$\text{On a vu que } \vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ on a donc bien } HC^2 - HD^2 = \vec{DC} \cdot \vec{AB}$$

c) En déduire que $HC = HD$.

$$\text{On a : } HC^2 - HD^2 = \vec{DC} \cdot \vec{AB}$$

$$\text{On a vu que } \vec{DC} \perp \vec{AB} \text{ donc } \vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0.$$