Centre étranger groupe 1, EXERCICE 2 (5 points)

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$d'unité 1km. Le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ représente le sol.

Les deux " routes aériennes " à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2), dont on connaît les représentations paramétriques :

$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x = 3 + a \\ y - 9 + 3\ a \\ z -= 2 \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathscr{D}_2 : \begin{cases} x = 0{,}5 + 2\ b \\ 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases}$ avec $b \in \mathbb{R}$

1° a) Indiquer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u_1}$ directeur de la droite $\mathscr{D}_1$ et d'un vecteur $\vec{u_2}$ directeur de la droite $\mathscr{D}_2$

b) Prouver que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas coplanaires.

3° On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées S (0 ; 4 ; 0,1), un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R). Soit $\mathscr{P}_1$ le plan contenant S et $\mathscr{D}_1$ et soit $\mathscr{P}_2$ le plan contenant S et $\mathscr{D}_2$.

a) Montrer que $\mathscr{D}_2$ est sécante à $\mathscr{P}_1$.

b Montrer que $\mathscr{D}_1$ est sécante à $\mathscr{P}_2$.

c) Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

CORRECTION

annalescentreétranger2000

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$d'unité 1 km. Le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ représente le sol.

Les deux " routes aériennes " à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2), dont on connaît les représentations paramétriques :

$(D_1) : \begin{cases} x = 3 + a \\ y - 9 + 3\,a \\ z -= 2 \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}$ $\quad (D_2) : \begin{cases} x = 0{,}5 + 2\,b \\ 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases}$ avec $b \in \mathbb{R}$

1° Indiquer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u_1}$ directeur de la droite (D_1) et d'un vecteur $\vec{u_2}$ directeur de la droite (D_2)

1° a) $\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ non colinéaires.

b) Prouver que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.

$M \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$ si et seulement si il existe deux réels a et b tels que :

$\begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3\,a \\ z = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0{,}5 + 2\,b \\ y = 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3\,a \\ z = 2 \\ x = 0{,}5 + 2\,b \\ y = 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ b = 2 \\ y = 6 \\ x = 4{,}5 \\ 4{,}5 = 3 + a \\ 6 = 9 + 3\,a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ b = 2 \\ y = 6 \\ x = 4{,}5 \\ 1{,}5 = a \\ 6 = 9 + 3 \times 1{,}5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 6 \neq 9 + 3 \times 1{,}5$ donc il n'y a pas de point d'intersection. $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont si sécantes ni coplanaires.

2° On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées S (0 ; 4 ; 0,1), un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R). Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1) et soit (P_2) le plan contenant S et (D_2).

a) Montrer que (D_2) est sécante à (P_1).

Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont un point commun S. Ils ne sont pas confondus ($\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas coplanaires) ils sont donc sécants. Soit Δ la droite intersection.

Δ et $\mathscr{D}_2$ sont coplanaires donc soit sécantes soit parallèles.

On démontre par l'absurde que Δ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles.

Si Δ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles alors $\vec{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ

Une représentation paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = 3 + 2\,c \\ y = 4 + c \\ y = 0{,}1 - c \end{cases}$

On étudie l'intersection des droites $\mathscr{D}_1$ et Δ

$\begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3\,a \\ z = 2 \\ x = 3 + 2\,c \\ y = 4 + c \\ y = 0{,}1 - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ c = -1{,}9 \\ y = 2{,}1 \\ x = -0{,}8 \\ 3 + a = -0{,}8 \\ 9 + 3\,a = 2{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ c = -1{,}9 \\ y = 2{,}1 \\ x = -0{,}8 \\ a = -3{,}8 \\ 9 + 3 \times (-3{,}8) = 2{,}1 \end{cases}$

$9 - 3 \times 3{,}8 \neq 2{,}1$ donc le système n'a pas de solution donc Δ et $\mathscr{D}_1$ ne sont pas sécantes.

Δ et $\mathscr{D}_1$ sont coplanaires (contenues dans le plan $\mathscr{P}_1$) et elles ne sont ni sécantes ni parallèles ($\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_1$ ne sont pas parallèles) ce qui est absurde.

Δ et $\mathscr{D}_2$ se coupent donc en M_1 qui est le point d'intersection de $\mathscr{D}_2$ avec $\mathscr{P}_1$.

Variante analytique 1

On cherche un vecteur normal de $\mathscr{P}_1$

Pour cela on cherche deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}_1$

Soit A (3 , 9 , 2) point de $\mathscr{D}_1$ donc de $\mathscr{P}_1$ et S (3 ; 4 ; 0,1) point de $\mathscr{P}_1$

$\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} 3-3 \\ 4-9 \\ 0,1-2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -1,9 \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathscr{P}_1$

$\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ c'est donc un vecteur de $\mathscr{P}_1$

$\overrightarrow{AS}$ et $\vec{u_1}$ sont deux vecteurs de $\mathscr{P}_1$ non colinéaires.

$\vec{n_1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur normal de $\mathscr{P}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -5\,b - 1,9\,c = 0 \\ a + 3\,b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3\,b \\ c = -\dfrac{5}{1,9}\,b \end{cases}$

Par exemple pour $b = -19$ on a : $a = 27$ et $c = 50$ $\vec{n_1}\begin{pmatrix} 57 \\ -19 \\ 50 \end{pmatrix}$

$\vec{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_2$

$\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{P}_1$ sont secants si et seulement si $\vec{u_2}$ et $\vec{n_1}$ ne sont pas orthogonaux

$\vec{u_2}\cdot\vec{n_1} = 57 \times 2 + 1 \times (-19) + (-1) \times 50 \neq 0$

$\vec{u_2}$ et $\vec{n_1}$ ne sont pas orthogonaux donc $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{P}_1$ sont secants

Variante analytique 2

On peut aussi calculer les coordonnées de M_1

Equation du plan $\mathscr{P}_1$:

On a vu que $\vec{n_1}\begin{pmatrix} 57 \\ -19 \\ 50 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}_1$

Equation de $\mathscr{P}_1$: $57\,x - 19\,y + 50\,z = 57 \times 3 - 19 \times 9 + 50 \times 2 \Leftrightarrow \boxed{57\,x - 19\,y + 50\,z = 100}$

Intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{D}_2$:

$M_1 \in \mathscr{D}_2 \cap \mathscr{P}_1$ si et seulement si il existe un réel a tel que : $57\,x - 19\,y + 50\,z = 100$ et $\begin{cases} x = 0,5 + 2\,b \\ y = 4 + b \\ z = 4 - b \end{cases}$

Calcul de b : $57 \times (0,5 + 2\,b) - 19 \times (4 + b) + 50 \times (4 - b) = 100 \Leftrightarrow b = -\dfrac{7}{6}$

Une seule valeur de b convient donc l'intersection de $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{P}_1$ est le point $M_1\left(-\dfrac{11}{6}, \dfrac{17}{6}, \dfrac{31}{6}\right)$

b) Montrer que $\mathscr{D}_1$ est sécante à $\mathscr{P}_2$.

On démontre par l'absurde que Δ et $\mathscr{D}_1$ ne sont pas parallèles.

Si Δ et $\mathscr{D}_1$ sont parallèles alors $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ

Une représentation paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = 3 + c \\ y = 4 + 3\,c \\ z = 0{,}1 \end{cases}$

On étudie l'intersection des droites $\mathscr{D}_2$ et Δ $\begin{cases} x = 0{,}5 + 2\,b \\ y = 4 + b \\ z = 4 - b \\ x = 3 + c \\ y = 4 + 3\,c \\ z = 0{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3{,}9 \\ x = 8{,}3 \\ y = 7{,}9 \\ z = 0{,}1 \\ 8{,}3 = 3 + c \\ 7{,}9 = 4 + 3\,c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3{,}9 \\ x = 8{,}3 \\ y = 7{,}9 \\ z = 0{,}1 \\ c = 5{,}3 \\ 7{,}9 = 4 + 3 \times 5{,}3 \end{cases}$

$7{,}9 \neq 4 + 3 \times 5{,}3$ donc le système n'a pas de solution donc Δ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas sécantes.
Δ et $\mathscr{D}_2$ sont coplanaires (contenues dans le plan $\mathscr{P}_2$) et elles ne sont ni sécantes ni parallèles ($\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_1$ ne sont pas parallèles) ce qui est absurde. Δ et $\mathscr{D}_1$ ne sont donc pas parallèles elles sont sécantes
Δ et $\mathscr{D}_1$ se coupent donc en M_2 qui est le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ avec $\mathscr{P}_2$.

Variante analytique 1

On cherche un vecteur normal de $\mathscr{P}_1$ Pour cela on cherche deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}_1$
Soit B (0,5 ; 4 ; 4) point de $\mathscr{D}_2$ donc de $\mathscr{P}_2$ et S (3 ; 4 ; 0,1) point de $\mathscr{P}_2$

$\vec{BS}\begin{pmatrix}3 - 1/2\\4 - 4\\1/10 - 4\end{pmatrix}$ donc $\vec{BS}\begin{pmatrix}2{,}5\\0\\-3{,}9\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}_2$

$\vec{n_2}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vecteur normal de $\mathscr{P}_1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5\,a - 3{,}9\,c = 0 \\ 2\,a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{39}{25}\,c \\ b = -\dfrac{53}{25}\,c \end{cases}$

Par exemple pour c = 25 on a : a = 39 et b = – 53. $\vec{n_2}\begin{pmatrix}39\\-53\\25\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}_2$

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$

$\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont secants si et seulement si $\vec{u_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas orthogonaux
$\vec{u_1} \cdot \vec{n_2} = 39 \times 1 + (-53) \times 3 + 25 \times 0 \neq 0$
$\vec{u_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas orthogonauxdonc $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont secants

Variante analytique 2

On peut aussi calculer les coordonnées de M_2
Equation du plan $\mathscr{P}_2$:

On a vu que $\vec{n_1}\begin{pmatrix}57\\-19\\50\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}_1$

Equation de $\mathscr{P}_2$: $39\,x - 53\,y + 25\,z = 39 \times 0{,}5 - 53\ 25 \times 4 + 25 \times 4 \Leftrightarrow \boxed{39\,x - 53\,y + 25\,z + 92{,}5 = 0}$

$M_2 \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{P}_2$ si et seulement si il existe un réel a tel que : $39\,x - 53\,y + 25\,z + 92{,}5$ et $\begin{cases} x = 3 + a \\ y = 9 + 3\,a \\ z = 2 \end{cases}$

Calcul de a : $39\,(3 + a) - 53\,(9 + 3\,a) + 25 \times 2 + 92{,}5 = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{29}{16}$

Une seule valeur de a convient donc l'intersection de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est le point $M_2\left(\dfrac{19}{16}, \dfrac{57}{16}, 2\right)$

c) Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites (D_1) et (D_2). Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

c) S, M_1 et M_2 sont sur Δ. Il suffit de prendre Δ comme direction. Δ et $\mathscr{D}_1$ se coupent en M_2 et Δ et $\mathscr{D}_2$ se coupent en M_1.