1 1° Soit A, B, C les points de coordonnées respectives (1 ; 1 ; 0), (0 ; 1 ; 2), (1 ; 3 ; –2). On se propose de déterminer une équation du plan (ABC) : Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.
a) Première méthode. Soit $\vec{u}$; un vecteur normal au plan (ABC), (α, β, γ) les coordonnées de $\vec{u}$. Ecrire deux égalités vérifiées par les coordonnées de $\vec{u}$. En déduire en les coordonnées d'un vecteur normal à (ABC). c) Déterminer une équation du plan (ABC).
b) Deuxième méthode. On note : $a x + b y + c z + d = 0$ une équation de (ABC). Exprimer analytiquement que A, B, C sont des points de (ABC). Résoudre le système formé par ces égalités.
2° Déterminer une équation cartésienne du plan (P) dans !es cas suivants
a) (P) passe par A(1 , – 1 , 2) et est parallèle au plan (P') : $3 x + 5 y - 8 z - 2 = 0$
b) (P) passe car A(1 , – 1 , 2) et B(1 , 0 , 2) et est perpendiculaire au plan d'équation $3 x + 5 y - 8 z - 3 = 0$.
c) (P) passe par A(1, 0, 2)et est perpendiculaire aux plans d'équations :
$3 x + 5 y - 8 z - 2 = 0$ et $x + y + z - 4 = 0$
3° Déterminer une équation de la sphère (S) dans les cas suivants :
a) (S) a pour centre Ω(–3 , 4 , 0) et pour rayon $3\sqrt{2}$
b) (S) a pour diamètre [AB] avec A(3 , –5 , 7) et B(1 , –3 , 9)
c) (S) passe par les 4 points A (0 , 4 , – 1), B(– 2 , 4 , – 5), C(1 , 1 , – 5) et D(1 , 0 , – 4).

2 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
1° Déterminer une équation du plan P passant par le point A(1 ; 0 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.
2° Soit P_0 le plan d'équation $x + 2 y - z + 1 = 0$ et M le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1).
a) Sachant que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur non nul normal à l'un est orthogonal à un vecteur non nul normal à l'autre, démontrer que les plans P et P_0 sont perpendiculaires.
b) Calculer les distances d et d_0 du point M aux plans P et P_0 respectivement.
3° a) Donner une représentation paramétrique de la droite D intersection des plans P et P_0.
b) Déterminer les coordonnées du point H de D tel que la droite (MH) soit perpendiculaire à la droite D.
c) Vérifier que $MH^2 = d^2 + d'^2$.

3 Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(2 ; 0 ; 0),\ B(-1 , \sqrt{3} , 0) \text{ et } C(-1 , -\sqrt{3} , 0)$$

1° Placer sur une figure les points A, B et C dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2° Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre.
3° a) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B.
b) Déterminer l'ensemble des points N de l'espace équidistants des points B et C.
c) En déduire que l'ensemble des points P de l'espace équidistants des points A, B et C est l'axe $(O ; \vec{k})$.
4° Montrer qu'il existe un unique point D dont la troisième coordonnée est positive tel que le tétraèdre ABCD soit régulier et calculer ses coordonnées.
5° Soit M un point quelconque du segment [CD]. On pose $\overrightarrow{CM} = \lambda\,\overrightarrow{CD}$ avec $\lambda \in [0 , 1]$.
a) Montrer que : $\cos \widehat{AMB} = \dfrac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$
On définit une fonction f de ℝ dans ℝ par la relation $f(\lambda) = \dfrac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} = 1 - \dfrac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$
b) Etudier les variations de la fonction f.
c) En déduire la position de M pour laquelle l'angle $\widehat{AMB}$ est maximum.
d) Quelle est la valeur de ce maximum ?

4 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A, B, C et S de coordonnées respectives :

A(– 1, 0, 1) ; B(1, 4,– 1) ; C(3, – 4,– 3) ; S(4, 0, 4).

1° Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en A.
2° a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{SO}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
3° a) Démontrer que O est le barycentre des points A, B, C affectés de coefficients que l'on déterminera.
b) En déduire que O est situé dans le triangle ABC.
4° Calculer le volume V du tétraèdre SABC.

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$ Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC)

$\begin{cases}-a+2c=0\\2b-2c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2c\\b=c\end{cases}$ par exemple $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. Equation de (ABC) : $2x+y+z=2+1=3$.

$\begin{cases}a+b+d=0\\b+2c+d=0\\a+3b-2c+d=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a+2c=0\\2b-2c=0\\a+b+d=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2c\\b=c\\2c+c+d=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2c\\b=c\\d=-3c\end{cases}$ par exemple $2x+y+z-3=0$.

2° a) $3x+5y-8z=3-5-16 \Leftrightarrow 3x+5y-8z=-18$

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\\-8\end{pmatrix}$ sont deux vecteur de P. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P

$\begin{cases}b=0\\3a+5b-8c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=0\\3a-8c=0\end{cases}$ par exemple $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}$ et donc une équation de P est : $8x+3z=8+6=14$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P

$\begin{cases}3a+5b-8c=0\\a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2b-11c=0\\a=-b-c\end{cases}$ par exemple $\begin{cases}b=11\\c=2\\a=-13\end{cases}$ $-13x+11y+2z=-13+4$

d) $x^2+ax+y+by+z^2+cz+d=0$

$\begin{cases}16+4b+1-c+d=0\\4-2a+16+4b+25-5c+d=0\\1+a+1+b+25-5c+d=0\\1+b+16-4c+d=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4b-c+d=-17\\-2a+4b-5c+d=-45\\a+b-5c+d=-27\\a-4c+d=-17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-4\\c=6\\t=5\end{cases}$

$x^2+2x+y^2-4y+z^2+6z+5=0$

$(x+1)^2-1+(y-2)^2-4+(z+3)^2-9+5=0$

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

Variante : Plan médiateur de [AB] : $x+2z+7=0$

Plan médiateur de [BC] : $x-y+3=0$

Plan médiateur de [DC] : $y-z-5=0$

les coordonnées (x,y,z) de Ω vérifient $\begin{cases}x+2z+7=0\\x-y+3=0\\y-z-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=2\\z=-3\end{cases}$

Equation de la sphère : $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=(x_A+1)^2+(y_A-2)^2+(z_A+3)^2=9$

$\boxed{2}$ 1° $-x+y+z=-x_A+y_A+z_A \Leftrightarrow -x+y+z=0$

2° a) $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal de $\mathscr{P}$ $\vec{n_0}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ vecteur normal de $\mathscr{P}_0$

On a : $\vec{n}\cdot\vec{n_0}=-1\times1+1\times2+1\times(-1)=0$ donc $\mathscr{P}\perp\mathscr{P}_0$

b) $d=d(M,\mathscr{P})=\dfrac{|-x_M+y_M+z_M|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{|-0+1+1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$d_0=d(M,\mathscr{P}_0)=\dfrac{|x_M+2y_M-z_M+1|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{|0+2-1+1|}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{6}$

3° a) $N\in D \Leftrightarrow \begin{cases}-x+y+z=0\\ x+2y-z+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\ y=-\dfrac{1}{3}\\ z=t+\dfrac{1}{3} \quad t\in\mathbb{R}\end{cases}$ vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$H\left(t,-\dfrac{1}{3},t+\dfrac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix}t-0\\ -\dfrac{1}{3}-1\\ t+\dfrac{1}{3}-1\end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow (t-0)\times1+(-\dfrac{1}{3}-1)\times0+(t+\dfrac{1}{3}-1)\times1=0$

$\Leftrightarrow t+t-\dfrac{2}{3}=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$ et $H\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

c) $MH^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1+16+1}{9}=2.$

$d^2+d_0^2=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{6}\right)^2=\dfrac{4\times3}{9}+4\times\dfrac{6}{36}=\dfrac{12+6}{9}=2.$

$\boxed{4}$ 1° $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+1\\4-0\\-1-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3+1\\-4-0\\-3-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times4+4\times(-4)+(-2)\times(-4)=8-16+8=0.$

2° $\overrightarrow{SO}\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SO}\cdot\overrightarrow{AB}=-4\times2+0\times4+(-2)\times(-4)=-8+8=0$

$\overrightarrow{SO}\cdot\overrightarrow{AC}=-4\times4+0\times-(-4)+(-4)\times(-4)=-16+0+16=0.$

b) $-4x-4z=-4x_A-4z_A=0$. Equation de (ABC) : $x+z=0$.

3° a) $\begin{cases}\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}=0\\ \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}=0\\ \dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\alpha+\beta+3\gamma=0\\ 4\beta-4\gamma=0\\ \alpha-\beta-3\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=\gamma\\ -\alpha+4\beta=0\\ \alpha-4\beta=0\end{cases}$

Par exemple en prenant b= 1 on obtient : O est le barycentre de (A , 4), (B, 1) et (C , 1).

b) O est dans le plan ABC. Comme α, β et γ sont de même signe O est à l'intérieur du triangle ABC.

4° $d(S,(ABC))=OS=4\sqrt{2}$ car O est le projeté orthogonal de S sur (ABC).

$V=\dfrac{1}{3}\times\text{aire}(ABC)\times d=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{AB\times AC}{2}\times4\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{4+16+4}\times\sqrt{16+16+16}\times4\times\sqrt{2}}{6}=\dfrac{2\sqrt{6}\times4\sqrt{3}\times4\sqrt{2}}{6}$

$=32.$