Polynésie novembre 2003. EXERCICE 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ on considère les points A(3 ; 0 ; 10), B(0 ; 0 ; 15) et C(0 ; 20 ; 0).

1° a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point E(9 ; 0 ; 0).

c) Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2° Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

a) Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).

c) Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $20x + 9y + 12z - 180 = 0$.

d) Montrer que le système $\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$ a une solution unique. Que représente cette solution?

e) Calculer la distance OH, en déduire que EH = 15 et l'aire du triangle EBC.

3° En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre OEBC, déterminer la distance du point O au plan (ABC). Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en 2° c)?

CORRECTION

1° a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-3\\0-0\\15-10\end{pmatrix}$ $\begin{cases}x = x_A + t\,(0-3)\\ y = y_A + t\,(0-0)\\ z = z_A + t\,(15-10) \quad t \in \mathbb{R}\end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases}x = 3 - 3\,t\\ y = 0\\ z = 10 + 5\,t \quad t \in \mathbb{R}\end{cases}$

b) $E \in (AB) \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}\ /\ \begin{cases}9 = 3 - 3\,t\\ 0 = 0\\ 0 = 10 + 5\,t\end{cases}$. On a : $\begin{cases}9 = 3 - 3\,t\\ 0 = 0\\ 0 = 10 + 5\,t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = \dfrac{3-9}{3}\\ 0 = 0\\ t = -\dfrac{10}{5}\end{cases} \Leftrightarrow t = -2.$

E est le point de (AB) de paramètre – 2 et de plus $E \in (Ox)$

c) $\begin{cases}0 = 3 - 3\,t\\ 20 = 0\\ 0 = 10 + 5\,t\end{cases}$ n'a pas de solution donc $C \notin (AB)$.

2° a)(EH) est la hauteur issue de E dans le triangle OBC donc $(EH) \perp (BC)$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-0\\20-0\\0-15\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix}$ on a : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OE} = 0 \times 9 + 20 \times 0 - 15 \times 0 = 0$. Donc $(BC) \perp (OE)$

$\left.\begin{array}{r}(BC) \perp (EH)\\ (BC) \perp (OE)\\ \text{O, E et h non alignés}\end{array}\right\}$ donc $(BC) \perp (OEH)$.

$\left.\begin{array}{r}(BC) \perp (OEH)\\ (EH) \subset (OEH)\end{array}\right\}$ donc $(BC) \perp (EH)$ donc dans le triangle EBC (EH) est la hauteur issue de E.

b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-0\\20-0\\0-15\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan (OEH) donc une équation du plan (OEH) est de la forme :

$0 \times x + 20 \times y - 15 \times z + d = 0 \Leftrightarrow 4\,y - 3\,z + d = 0.$

$O \in (OEH)$ donc $4 \times 0 - 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

Equation du plan (OEH) : $4\,y - 3\,z = 0$.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\20\\-15\end{pmatrix}$. recherche d'un vecteur $\vec{u}$ normal au plan (ABC).

$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix} \Leftrightarrow -3\,a + 5\,c = 0$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \perp \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\20\\-15\end{pmatrix} \Leftrightarrow a \times 0 + b \times 20 - c \times 15 = 0.$

On pose a = 20. On a alors : $\begin{cases}-3\,a + 5\,c = 0\\ 4\,b - 3\,c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-60 + 5\,c = 0\\ 4\,b - 3\,c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c = 12\\ 4\,b - 36 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c = 12\\ b = 9\end{cases}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}20\\9\\12\end{pmatrix}$ équation du plan (ABC) : $20\,x + 9\,y + 12\,z = 20\,x_A + 9\,y_A + 12\,z_A = 20 \times 3 + 9 \times 0 + 12 \times 10 = 180.$

Equation de (ABC) : $20\,x + 9\,y + 12\,z - 180 = 0$.

d) $\begin{cases}x = 0\\ 4\,y - 3\,z = 0\\ 20\,x + 9\,y + 12\,z - 180 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ 3\,z = 4\,y\\ 20 \times 0 + 9\,y + 16\,y - 180 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ y = \dfrac{180}{25}\\ z = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{180}{25}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ y = \dfrac{36}{5}\\ z = \dfrac{48}{5}\end{cases}$

cette solution donne les coordonnées du point d'intersection du plan (ABC) avec la droite $\mathscr{D}$ définie par $\begin{cases}x = 0\\ 4\,y = 3\,z\end{cases}$.

La droite $\mathscr{D}$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3\,t \\ z = 4\,t \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ de cette droite est colinéaire au vecteur (BC). c'est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$ passant par O c'est à dire la droite (OH).

Le point d'intersection du plan (ABC) avec la droite $\mathscr{D}$ est le point H donc $H\left(0\,,\dfrac{36}{5}\,,\dfrac{48}{5}\right)$

$d(O, (ABC)) = OH = \dfrac{\sqrt{36^2 + 48^2}}{5} = \dfrac{\sqrt{3600}}{5} = \dfrac{60}{5} = 12.$

$\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{OH}\begin{pmatrix} 0 \\ 36/5 \\ 48/5 \end{pmatrix} = 0$) d'après le théorème de pythagore dans le triangle OEH rectangle en O on a :

$EH^2 = OE^2 + OH^2 = 81 + 144 = 225$ donc EH = 15.

$\text{Aire (EBC)} = \dfrac{EH \times BC}{2} = \dfrac{15 \times \sqrt{20^2 + 15^2}}{2} = \dfrac{15 \times 25}{2} = \dfrac{375}{2}$

3° On note d = d(O, (EBC)) = d(O, (ABC)) car E ∈ (AB) donc (EBC) = (ABC)

$V(OEBC) = \dfrac{1}{3}\,\text{Aire (EBC)} \times d = \dfrac{1}{3}\,OE \times \text{Aire (OBC)}$

$\text{Aire (EBC)} = \dfrac{375}{2}$ et $\text{Aire (OBC)} = \dfrac{OB \times OC}{2} = \dfrac{15 \times 20}{2} = 150$. (OBC rectangle en O)

On a donc : $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{375}{2} \times d = \dfrac{1}{3} \times 150 \times 9 \Leftrightarrow d = 150 \times 9 \times \dfrac{2}{375} = \dfrac{36}{5}$

$d = \dfrac{|\,20 \times 0 + 9 \times 0 + 12 \times 0 - 180\,|}{\sqrt{20^2 + 9^2 + 12^2}} = \dfrac{180}{25} = \dfrac{36}{5}$