PARIS, 1987

Dans un plan $\mathscr{P}$ de l'espace, on considère un cercle C de diamètre [AB] .

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A orthogonale à $\mathscr{P}$ et S un point de O distinct de A.

On note I le projeté orthogonal de A sur la droite (BS) .

Pour tout point M du cercle $\mathscr{C}$ on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS) .

1° Placer les données précédentes sur une figure, à étant placée verticalement.

2° Prouver que H appartient à la sphère £ de diamètre [AS] .

3° Dans cette question, on suppose que M est distinct de A et de B. Prou-ver que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMS). En déduire que la droite (AH) est orthogonale au plan (BMS) .

4° Montrer que H appartient au plan H passant par I orthogonal à la droite (BS) .

5° a. Déterminer l'intersection F de la sphère 1 et du plan a . b. Prouver que l'ensemble décrit par H lorsque M parcourt C est égal à r . À cet effet, étant donné un point N' de F distinct de A, on pourra montrer que le plan (AN'S) coupe le cercle C en A et en un autre point M.

CORRECTION

Paris 1987 :

2° ASH est rectangle en h donc $H \in \Sigma$

3° Dans le plan $\mathscr{P}$ M est sur le cercle de diamètre [AB] donc $(AM) \perp (BM)$

$\left.\begin{array}{l}(AS) \perp (AMB) \\ (BM) \subset (AMB)\end{array}\right\}$ donc $(BM) \perp (AS)$

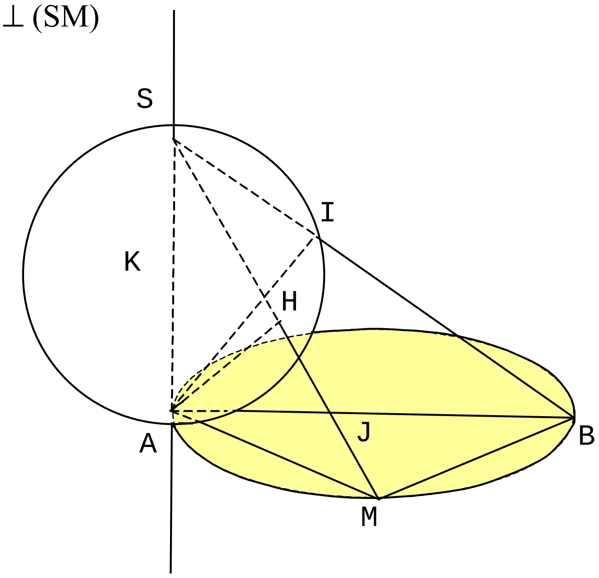
$\left.\begin{array}{l}(MB) \perp (AS) \\ (MB) \perp (AM)\end{array}\right\}$ donc $(MB) \perp (AMS)$

H est le projeté orthogonal de A sur (SM) donc $H \in (SAM)$ et $(AH) \perp (SM)$

$\left.\begin{array}{l}(MB) \perp (SAM) \\ (AH) \subset (SAM)\end{array}\right\}$ donc $(AH) \perp (MB)$

$\left.\begin{array}{l}(AH) \perp (SM) \\ (AH) \perp (MB)\end{array}\right\}$ donc $(AH) \perp (SMB)$

Car (MB) et (SM) sont deux droites sécantes du plan (SMB)



4° $\left.\begin{array}{l}(AH) \perp (SMB) \\ (SB) \subset (SMB)\end{array}\right\}$ donc $(AH) \perp (SB)$

$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 + 0 = 0$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{SB} \\ I \in \Pi\end{array}\right\}$ donc $H \in \Pi$

5° a) I est le projeté orthogonal de A sur (SB) donc $(AI) \perp (SB)$

donc $A \in \Pi$

$\Pi = (AIH)$

$\Sigma \cap \Pi$ est donc le cercle circonscrit au triangle AHI : Γ.

On a vu que $(AH) \perp (SMB)$ donc $(AH) \perp (HI)$

le cercle circonscrit au triangle AHI est donc le cercle Γest le cercle de diamètre [AI] dans le plan Π.

b) Soit N ' un point de Γ

Le plan (SAN') coupe le plan $\mathscr{P}$ selon une droite $\mathscr{D}$ qui passe par A.

$\mathscr{D}$ ne peut pas être tangente au cercle $\mathscr{C}$ car sinon N ' = A

Dans le plan $\mathscr{P}$, $\mathscr{D}$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point M. Figure 1

Soit H le projeté orthogonal de A sur (SM). H est aussi un point de Γ.

Le plan (SAN') coupe donc le cercle Γ en trois points A, N ' et H.

On a donc H = N ' figure 2

N' correspond donc au point M du cercle $\mathscr{C}$

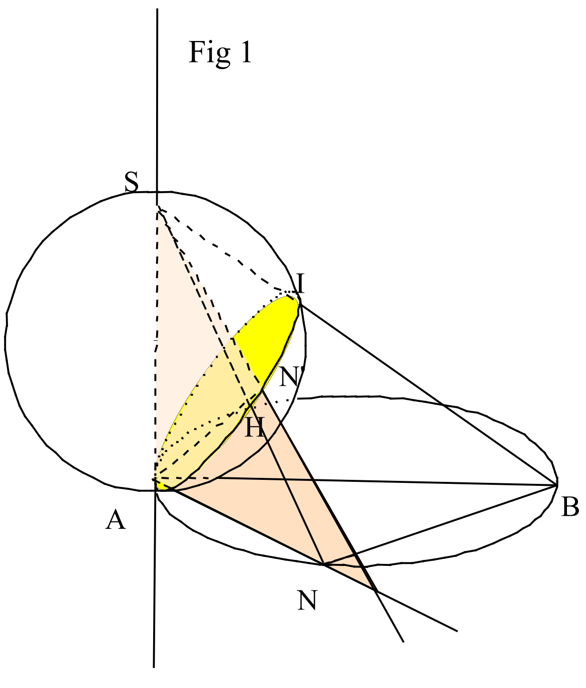


Fig 1

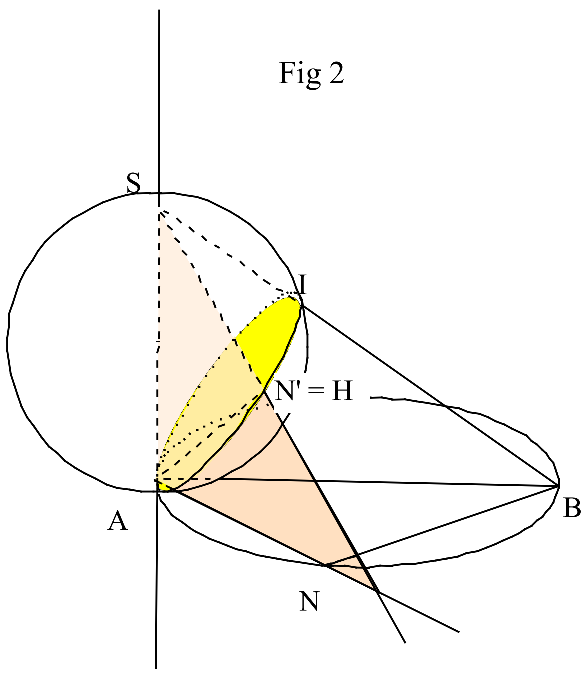


Fig 2