L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormal. Soit s un nombre réel.
On donne les points A (8 ; 0 ; 8), B (10 ; 3 ; 10) ainsi que la droite (D) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -5 + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = -2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

1° a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.
b) Démontrer que D et Δ sont non coplanaires.
a) Le plan (P) est parallèle à (D) et il contient Δ.Montrer que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; − 2 ; 1) est un vecteur normal à P puis déterminer une équation cartésienne de (P) .
c) Montrer que la distance d'un point quelconque M de (D) à (P) est indépendante de M.
d) Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de (P) avec le plan (xOy).
3° La sphère (S) est tangente au plan (P) au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de S se trouve à la distance d = 6 de (P) , du même côté que O. Donner l'équation cartésienne de S .

CORRECTION

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormal. Soit s un nombre réel.

On donne les points A (8 ; 0 ; 8), B (10 ;3;10) ainsi que la droite (D) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = -5+3s \\ y = 1+2s \\ z = -2s \end{cases}$ **s ∈ IR**

1. a. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 10-8 \\ 3-0 \\ 10-8 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ. Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$\begin{cases} x = x_A + 2t \\ y = y_A + 3t \\ z = z_A + 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ c'est à dire $\begin{cases} x = 8+2t \\ y = 3t \\ z = 8+2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

1. b. Démontrer que D et Δ sont non coplanaires.

Première méthode.

On sait que deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.

On démontre qu'elles ne sont ni l'une ni l'autre.

Etude du parallèlisme :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

Etude de l'intersection des deux droites

Il faut résoudre le système $\begin{cases} x = -5+3s \\ y = 1+2s \\ z = -2s \\ x = 8+2t \\ y = 3t \\ z = 8+2t \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -5+3s \\ y = 1+2s \\ z = -2s \\ x = 8+2t \\ y = 3t \\ z = 8+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5+3s = -2s \\ y = 1+2s \\ z = -2s \\ x = 8+2t \\ y = 3t \\ z = 8+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \\ x = 8+2t \\ 3 = 3t \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \\ x = -2 \\ t = 1 \\ x = 8+2 \end{cases}$$ ce qui est impossible.

Le système n'a donc pas de solution et donc les droites (AB) et Δ ne sont pas sécantes

Les droites (AB) et Δ ne sont ni sécantes ni parallèles, elles ne sont donc pas coplanaires.

Deuxième méthode.

Le point N(5 , 1 , 0) est un point de Δ le point A(8 , 0 , 8) est un point de (D)

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} 5-8 \\ 1-0 \\ 0-8 \end{pmatrix}$

(AB) et Δ sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont coplanaires

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ colinéaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AN} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{n}$

$$\overrightarrow{AN} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 3\alpha + 2\beta \\ 1 = 2\alpha + 3\beta \\ -8 = -2\alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{7}{5} \\ -3 = 3\alpha - 2\times\frac{7}{5} \\ 1 = 2\alpha - 3\times\frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{7}{5} \\ 3\alpha = -\frac{15}{5} + \frac{14}{5} \\ 2\alpha = \frac{5}{5} + \frac{21}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{7}{5} \\ \alpha = -\frac{1}{5} \\ \alpha = \frac{13}{5} \end{cases}$$

Le système n'a donc pas de solution et donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AN}$ ne sont pas coplanaires

2. a. Le plan (P) est parallèle à (D) et il contient Δ. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; – 2 ; 1) est un vecteur normal à P puis déterminer une équation cartésienne de (P) .

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$ sont donc deux vecteurs directeurs du plan (P), non colinéaires.

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 3\times 2 + 2\times(-2) + (-2)\times 1 = 6 - 4 - 2 = 0$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 2\times 2 + 3\times(-2) + 2\times 1 = 4 - 6 + 2 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ il est donc orthogonal à (P)

le point A (8 ; 0 ; 8), est un point de Δ donc de (P) et $\vec{n}$ est un vecteur normal de (P) on a donc :

Equation de (P) : $2x - 2y + z = 2\times 8 - 2\times 0 + 8 \Leftrightarrow 2x - 2y + z = 24$.

b. Montrer que la distance d'un point quelconque M de (D) à (P) est indépendante de M.

Soit M(x , y , z) un point de (D). Il existe un réel s tel que : $\begin{cases} x = -5 + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = -2s \end{cases}$

$$d(M, (P)) = \frac{|2x - 2y + z - 24|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|2(-5+3s) - 2(1+2s) - 2s - 24|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|-10 + 6s - 2 - 4s - 2s - 24|}{3} = 12.$$

On trouve bien un réel indépendant de M ce qui s'explique par le fait que la droite (D) est parallèle au plan (P) .

c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de (P) avec le plan (xOy).

Equation de (P) : $2x - 2y + z - 24 = 0$.

Equation du plan (xOy) : $z = 0$

$$M(x, y, z) \in P \cap (xOy) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z - 24 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2y + 24 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 12 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. La sphère (S) est tangente au plan (P) au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de S se trouve à la distance d = 6 de (P) , du même côté que O. Donner l'équation cartésienne de S .

On vérifie que C ∈ (P) : $2\times 10 - 2\times 1 + 6 - 24 = 20 - 2 + 6 - 24 = 0$.

Si Ω est le centre cherché alors C est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P).

On peut dire alors que d(Ω , (P)) = CΩ et que les vecteurs $\overrightarrow{C\Omega}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

Ω est donc un point tel que il existe un réel k telque $\overrightarrow{C\Omega} = k\,\vec{n}$ et CΩ = 6

$\|\overrightarrow{C\Omega}\| = |k| \times \|\vec{n}\|$ on a donc : et d (Ω,P) = CΩ = 6 CΩ = 6 $\Leftrightarrow |k| \times \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 6 \Leftrightarrow |k| = 2 \Leftrightarrow k = 2$ ou $k = -2$.

Ses deux valeurs de k correspondent à deux points

Pour connaître le point qui est du même côté du plan (P) on calcule les coordonnées des deux points et on choisit le point tel que $2\times x_\Omega - 2\times y_\Omega + z_\Omega - 24$ soit du même signe que $2\times 0 - 2\times 0 + 0 - 24$.

Si k = 2 alors $\overrightarrow{C\Omega}\begin{pmatrix}2\times 2\\-2\times 2\\2\end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} x_\Omega = 10 + 4 \\ y_\Omega = 1 - 4 \\ z_\Omega = 6 + 2 \end{cases}$

Ω (14 , – 3; 8) et $2\times 14 - 2\times(-3)\ 6 + 8 - 24 \geq 0$ alors que $2\times 0 - 2\times 0 + 8 - 24 < 0$ le point trouvé n'est pas du même coté de (P) que O.

Si k = – 2 alors $\overrightarrow{C\Omega}\begin{pmatrix}-2\times 2\\2\times 2\\-2\end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} x_\Omega = 10 - 4 \\ y_\Omega = 1 + 4 \\ z_\Omega = 6 - 2 \end{cases}$ alors : Ω (6 ; 5 ; 4)

$2\times 6 - 2\times 5 + 4 - 24 = -10 < 0$ donc Ω (6 ; 5 ; 4) est le point cherché et l'équation de (S) est alors :

$$(x-6)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 36.$$

Analytiquement

Ω est sur (D) donc il existe s tel que $\begin{cases} x_\Omega = 10 + 2s \\ y_\Omega = 1 - 2s \\ z_\Omega = 6 + s \end{cases}$

Les coordonnées de Ω doivent donc vérifier : $\begin{cases} x_\Omega = 10 + 2s \\ y_\Omega = 1 - 2s \\ z_\Omega = 6 + s \end{cases}$ et $(x_\Omega - 10)^2 + (y_\Omega - 1)^2 + (z_\Omega - 6)^2 = 36$.

calcul de s :

$(10 + 2s - 10)^2 + (1 - 2s - 1)^2 + (6 + s - 6)^2 = 36 \Leftrightarrow 4s^2 + 4s^2 + s^2 = 36 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 9s^2 = 36 \Leftrightarrow s = 2$ ou $s = -2$

Si s = 2, Ω (14 , – 3; 8) et si s = – 2 alors : Ω (6 ; 5 ; 4) On retrouve les mêmes points et Ω (6 ; 5 ; 4) est du même coté de O et on retrouve l'équation de la sphère : $(x-6)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 36$.