Liban - Série S - juin 2003
Problème (11 points)

Partie A :Etude d'une fonction auxiliaire g
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\,e^x + 2\,x - 7$
a) Etudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
c) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α telle que $094 < \alpha < 0941$
d) Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$
Partie B :Etude d'une fonction f
Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (2\,x - 5)(1 - e^{-x})$
Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé unité 1cm
1° a) Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$
b) Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
c) Calculer f(x) et vérifier que f(x) et g(x) ont le même signe. Dresser le tableau de variations de f.
2° a) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{(2\,\alpha - 5)^2}{2\,\alpha - 7}$
b) Etudier le sens de variation de la fonction $h : x \longmapsto -\dfrac{(2\,x - 5)^2}{2\,x - 7}$
En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude 10^{-1} de $f(\alpha)$.
3° Démontrer que la droite (D),d'équation $y = 2\,x - 5$,est asymptote à (C) en $+\infty$.
Etudier la position relative de (C) et (D)
Partie C. Etude d'une suite de rapports de distances
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on considère les points A_n, B_n et C_n d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite D et à la courbe $\mathscr{C}$
Soit U_n le réel défini par : $U_n = \dfrac{C_nB_n}{A_nB_n}$
a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a : $U_n = \dfrac{2\,n - 5 - f(n)}{2\,n - 5}$
Quelle est la nature de la suite (U_n) ?
b) Calculer la limite de la suite (U_n).
Pouvait-on prévoir ce résultat ?

CORRECTION

Partie A :Etude d'une fonction auxiliaire g On considère la fonction g définie sur R par $g(x) = 2\,e^x + 2\,x - 7$

a) Etudier les limites de g en – ∞ et + ∞.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2\,e^x = 2 \times 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2\,x - 7 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

$g(x) = e^x \left(2 + 2 \times \dfrac{x}{e^x} - 7\,e^{-x}\right)$ On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

On sait aussi que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + 2 \times \dfrac{x}{e^x} - 7\,e^{-x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

b) Etudier le sens de variation de g sur ℝ et dresser son tableau de variation.

g est dérivable sur ℝ et $g'(x) = 2\,e^x + 2$. pour tout réel x $e^x > 0$ donc $g'(x) > 0$.

g est donc croissante sur ℝ.

x	– ∞		– ∞
g	– ∞	↗	+ ∞

c) Justifier que l'équation g(x) = 0 admet dans ℝ une unique solution α telle que 094 < α < 0941

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle ℝ, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans ℝ.

$g(0,940) < 0 < g(0,941)$ donc cette solution α est comprise entre 0,940 et 0,941.

d) Étudier le signe de g sur ℝ

D'après les variations de g on a :

x	– ∞	α	– ∞
g(x)	–	0	+

Partie B :Etude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (2\,x - 5)(1 - e^{-x})$ Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé unité 1cm

1° a) Étudier le signe de f sur ℝ

$2\,x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{2}$

$1 - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-x} \Leftrightarrow 1 \geq -x \Leftrightarrow -1 \leq x$

x	– ∞		– 1		2,5		+ ∞
$1 - e^{-x}$		–	0	+		+	
$2\,x - 5$		–		–	0	+	
f(x)		+	0	–	0	+	

b) Étudier les limites de f en – ∞ et + ∞.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (2\,x - 5) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2\,x - 5) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1 - 0 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) Calculer f '(x) et vérifier que f '(x) et g(x) ont le même signe. Dresser le tableau de variations de f.

f est dérivable sur ℝ et $f'(x) = 2 \times (1 - e^{-x}) + (2\,x - 5) \times (-(-e^{-x})) = 2 - 2\,e^{-x} + 2\,x\,e^{-x} - 5\,e^{-x}$

$= e^{-x}(2\,x - 7 + 2\,e^x) = e^{-x}\,g(x)$

Pour tout réel x $e^{-x} > 0$ donc f '(x) est bien du signe de g(x)

2° a) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{(2\,\alpha - 5)^2}{2\,\alpha - 7}$

On sait que $g(\alpha) = 0$ c'est à dire $2\,e^{\alpha} + 2\,\alpha - 7 = 0$ c'est à dire $e^{\alpha} = \dfrac{7 - 2\,\alpha}{2}$

On a donc $f(\alpha) = (2\,\alpha - 5)\,(1 - e^{-\alpha}) = (2\,\alpha - 5)\left(1 - \dfrac{2}{7 - 2\,\alpha}\right) = (2\,\alpha - 5)\,\dfrac{7 - 2\,\alpha - 2}{7 - 2\,\alpha} = (2\,\alpha - 5)\,\dfrac{2\,\alpha - 5}{2\,\alpha - 7} = \dfrac{(2\,\alpha - 5)^2}{2\,\alpha - 7}$

b) Etudier le sens de variation de la fonction h : $x \longmapsto -\dfrac{(2\,x - 5)^2}{2\,x - 7}$

En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude 10^{-1} de f(α).

h est dérivable sur] – ∞ ; 3,5 [et sur] 3,5 ; + ∞ [

$h'(x) = \dfrac{(2\,x - 7) \times 2 \times 2\,(2\,x - 5) - (2\,x - 5)^2 \times 2}{(2\,x - 7)^4}$

$= \dfrac{(2\,x - 5)\,(4\,(2\,x - 7) - 2\,(2\,x - 5))}{(2\,x - 7)^4}$

$= \dfrac{(2\,x - 5)\,(8\,x - 28 - 4\,x + 10)}{(2\,x - 7)^4}$

$= \dfrac{(4\,x - 18)\,(2\,x - 5)}{(2\,x - 7)^4}$

x	– ∞		2,5		3,5		4,5		+ ∞
h '(x)		+		–	‖	–	0	+	
h		↗		↘	‖	↘		↗	

Sur l'intervalle [0,940 ; 0,941] ⊂] – ∞ ; 2,5 [la fonction h est croissante.

$0,940 < \alpha < 0,941$ donc $h(0,940) < h(\alpha) < h(0,941)$.

$h(0,940) \approx -1,901$ et $h(0,941) \approx -1,899$ donc $-1,9 < f(\alpha) < -1,8$

3° Démontrer que la droite (D),d'équation $y = 2x - 5$,est asymptote à (C) en $+\infty$. Etudier la position relative de (C) et (D)

$f(x) - (2x - 5) = (2x - 5)(1 - e^{-x}) - (2x - 5) = -(2x - 5)e^{-x}$

$= -2xe^{-x} + 5e^{-x}$

$\lim_{x \to +\infty} -2xe^{-x} = 0 = \lim_{x \to +\infty} e^{-x}$

donc $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (2x - 5)) = 0$

x	$-\infty$	2,5	$+\infty$
$5 - 2x$	+	0	–
	(C) est au dessus de (D)		(C) est au dessous de (D)

On peut donc dire que la droite d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à (C).

$f(x) - (2x - 5) = -(2x - 5)e^{-x}$ et e^{-x} est toujours positif donc $f(x) - (2x - 5)$ est du signe de $5 - 2x$

Partie C. Etude d'une suite de rapports de distances Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on considère les points A_n, B_n et C_n d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite D et à la courbe ✍ Soit U_n le réel défini par : $U_n = \frac{C_nB_n}{A_nB_n}$ a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a : $U_n = \frac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5}$ Quelle est la nature de la suite (U_n) ?

$A_n(n, 0)$, $B_n(n, 2n - 5)$ et $C_n(n, f(n))$. $A_nB_n = |2n - 5| = 2n - 5$ pour $n \geq 3$

$C_nB_n = |f(n) - (2n - 5)| = 2n - 5 - f(n)$ car sur $[2,5 ; +\infty[$ $f(x) - (2x - 5) \leq 0$

On a donc bien $U_n = \frac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5}$

$$\frac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5} = \frac{2n - 5 - (2n - 5)(1 - e^{-n})}{2n - 5} = \frac{(2n - 5)e^{-n}}{2n - 5} = e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

La suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$

b) Calculer la limite de la suite (U_n). Pouvait-on prévoir ce résultat ?

$\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$.

On sait que la droite (D) et la courbe (C) sont asymptotes donc $\lim_{n \to +\infty} C_nB_n = 0 = \lim_{n \to +\infty} 2n - 5 - f(n)$

On a aussi $\lim_{n \to +\infty} A_nB_n = \lim_{n \to +\infty} 2n - 5 = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{C_nB_n}{A_nB_n} = 0$.