1° Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]\, 0\, ;+\infty\, [$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.
b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]\, 0\, ;+\infty\, [$.
On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[\, 1\, ;\, \mathrm{e}\,]$.
c) Etudier le signe de $f_n(x)$ sur $]\, 0\, ;+\infty\, [$
2° Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.
a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\, ;\, 1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\, ;\, 0)$.
b) Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.
d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).
3° a) Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.
b) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.
c) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).
d) Montrer que la suite (α_n) converge. On note alors   sa limite.
Etablir que $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.
4° On désigne par $\mathscr{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = \mathrm{e}$.
a) Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égaie à $\dfrac{\alpha_n^{\,2}}{n}$
b) Etablir que : $(\mathrm{e} - \alpha_n) \ln \alpha_n \leq \dfrac{\alpha_n^{\,2}}{n} \leq (\mathrm{e} - \alpha_n)$.
c) En déduire un encadrement de $n\,(\mathrm{e} - \alpha_n)$.
d) La suite de terme général $n\,(\mathrm{e} - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?

CORRECTION

1° Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur] 0 ; + ∞ [par : $f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$.

a) Déterminer les limites de f_n en 0 et en + ∞ puis étudier le sens de variations de f_n .

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = \infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{n} - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} > 0$ pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier naturel n.

La fonction f_n est donc croissante sur] 0 ; + ∞ [.

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution dans] 0 ; + ∞ [. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle [1 ; e].

f_n est continue et strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty$ donc la fonction f_n change de signe sur] 0 ; + ∞ [. D'après le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire on peut dire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n

$f_n(1) = \frac{1}{n} - 1 \leq 0$ et $f_n(e) = \frac{e}{n} > 0$ donc $1 \leq \alpha_n < e$

c) Etudier le signe de $g_n(x)$ sur] 0 ; + ∞ [

D'après les variations de la fonction f_n on a : $f_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow x$

2° Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On note (T) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées (0 ; 1) et le point Bn de coordonnées (n ; 0).

$\overrightarrow{AB_n}\begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$ colinéaires si et seulement si $n(y-1) + x = 0$ c'est à dire $y = -\frac{x}{n} + n$

b) Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = -\frac{x}{n} + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln x \\ \ln x = -\frac{x}{n} + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln x \\ \ln x + \frac{x}{n} - n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln x \\ f_n(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \alpha_n$$

d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

$\alpha_1 = 1$ car $g_1(1) = \ln 1 - \dfrac{1}{1} + 1 = 0$. La suite (α_n) semble être croissante.

3° a) Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

$$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha_n + \frac{\alpha_n}{n} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha_n = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$$

b) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \ln \alpha_n + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = 1 - \frac{\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = \frac{-(n+1)\,\alpha_n + n\,\alpha_n}{n\,(n+1)} = -\frac{\alpha_n}{n\,(n+1)} < 0$$

c) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ donc $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

Comme la fonction f_n est croissante sur $]\, 0, +\infty\, [$ et que α_n et α_{n+1} sont strictement positifs on a : $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

En effet démontrons, par l'absurde, que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

Si on avait $\alpha_n > \alpha_{n+1} > 0$ comme f_{n+1} est croissante sur $]\, 0, +\infty\, [$ on aurait alors $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ ce qui est contraire aux hypothèses.

On a donc bien pour tout entier naturel n, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. La suite (α_n) est donc croissante.

d) On admet que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Établir que : $\ln \ell = \ell$ et en déduire la valeur de ℓ.

La suite (α_n) est croissante et majorée par e elle est donc convergente.

$\ln \alpha_n = 1 - \dfrac{\alpha_n}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln \alpha_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\alpha_n}{n}\right) = 1$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln \alpha_n = \ln \ell$. on a donc bien $\ln \ell = 1$ c'est à dire $\ell = e$

4° On désigne par $\mathscr{D}_n$ le domaine délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = \alpha_n$ et $x = \mathrm{e}$.

a) Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}_n$ en fonction de α_n et montrer que cette aire est égale à $\dfrac{\alpha_n^{\,2}}{n}$

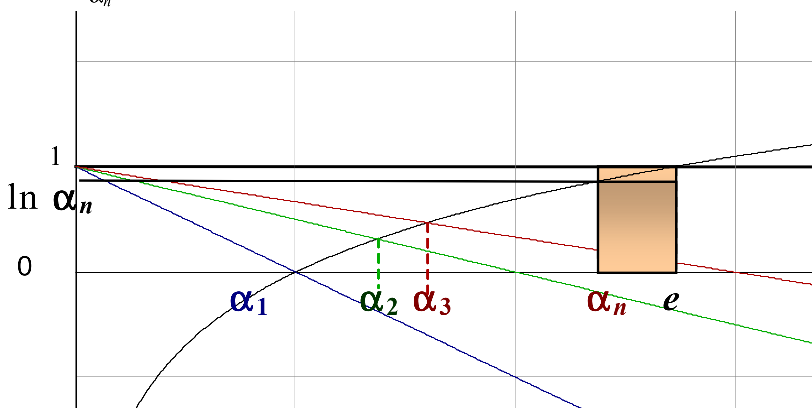
Pour tout réel x de $[\, \alpha_n , \mathrm{e}\,]$, $\ln x \geq 0$ donc en unité d'aire on a :

$\mathscr{A}(D_n) = \int_{\alpha_n}^{\mathrm{e}} \ln x \, dx$. Soit u et v les fonctions dérivables sur $[\, \alpha_n , \mathrm{e}]$ telles que :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \text{ et } u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = 1 \text{ et } v(x) = x \end{cases} \text{ on a donc } \int_{\alpha_n}^{\mathrm{e}} \ln x \, dx = [\, x \ln x\,]_{\alpha_n}^{\mathrm{e}} - \int_{\alpha_n}^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \times x \, dx = \mathrm{e} \ln \mathrm{e} - \alpha_n \ln \alpha_n - (\mathrm{e} - \alpha_n) =$$

$$\mathrm{e} - \alpha_n \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right) - \mathrm{e} + \alpha_n = \frac{\alpha_n^{\,2}}{n}.$$

b) Etablir que : $(\mathrm{e} - \alpha_n) \ln \alpha_n \leq \dfrac{\alpha_n^{\,2}}{n} \leq (\mathrm{e} - \alpha_n)$.



$\mathscr{A}_1$: aire du grand rectangle : $(e - \alpha_n) \times 1$

$\mathscr{A}_2$: aire du petit rectangle : $(e - \alpha_n) \times \ln \alpha$

$\mathscr{A}_1 \leq \dfrac{\alpha_n^{\,2}}{n} \leq \mathscr{A}_2$

Variante :

Pour tout réel x de $[\, \alpha_n, \mathrm{e}\,]$, $\ln \alpha_n \leq \ln x \leq \ln \mathrm{e}$ car la fonction ln est croissante.

D'après l'inégalité de la moyenne on a donc : $\ln \alpha_n \leq \dfrac{\int_{\alpha_n}^{\mathrm{e}} \ln x \, dx}{\mathrm{e} - \alpha_n} \leq 1$ donc $(\mathrm{e} - \alpha_n) \ln \alpha_n \leq \dfrac{\alpha_n^{\,2}}{n} \leq (\mathrm{e} - \alpha_n)$.

c) En déduire un encadrement de $n\,(\mathrm{e} - \alpha_n)$.

$(\mathrm{e} - \alpha_n) \ln \alpha_n \leq \dfrac{\alpha_n^{\,2}}{n} \leq (\mathrm{e} - \alpha_n)$ donc $n\,(\mathrm{e} - \alpha_n) \ln \alpha_n \leq \alpha_n^{\,2} \leq n\,(\mathrm{e} - \alpha_n)$.

donc $n\,(\mathrm{e} - \alpha_n) \leq \dfrac{\alpha_n^{\,2}}{\ln \alpha_n}$ et $n\,(\mathrm{e} - \alpha_n) \geq \alpha_n^{\,2}$

On a donc : $\alpha_n^{\,2} \leq n\,(\mathrm{e} - \alpha_n) \leq \dfrac{\alpha_n^{\,2}}{\ln \alpha_n}$

d) La suite de terme général $n\,(e - \alpha_n)$ est-elle convergente ? Ce résultat permet-il d'apprécier la rapidité de la convergence de la suite (α_n) ?

$\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = e$ donc par continuité on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n^{\,2} = e^2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_n^{\,2}}{\ln \alpha_n} = \dfrac{e^2}{\ln e} = e^2$

d'après le théorème des gendarmes la suite de terme général $n\,(e - \alpha_n)$ converge vers e^2.

La suite (α_n) converge donc à la même vitesse que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ c'est à dire lentement.