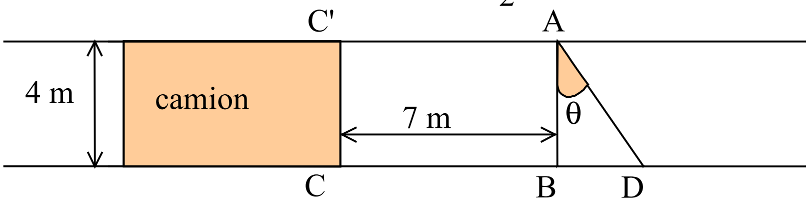
Nouvelle-Calédonie novembre 2005

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à . . .30 km/h !
L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).



1° Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

2° On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta}$

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3° Conclure.

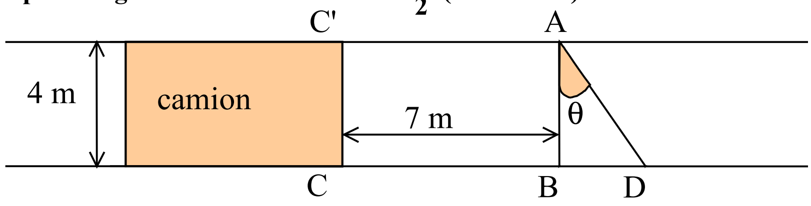
Rappel :

La fonction $x \longmapsto \tan x$ est dérivable sur $[0\,,\frac{\pi}{2}[$ et a pour dérivée la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

CORRECTION

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à .30 km/h ! L'avant du camion est représenté par le segment [CC '] sur le schéma ci-dessous. Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).



1° Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

Dans le triangle ABD rectangle en B on a : $\cos\theta = \dfrac{AB}{AD}$ donc $AD = \dfrac{AB}{\cos\theta} = \dfrac{4}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \dfrac{BD}{AB}$ donc $BD = AB \times \tan\theta = 4\tan\theta$ donc $CD = 7 + 4\tan\theta$

Si d_1 est la distance CD et Km et t_1 le temps en heures. $v_1 = \dfrac{d_1}{t_1} = 60$ Km h^{-1} et $d_1 = \dfrac{0{,}004}{\cos\theta}$

Si d_2 est la distance AD et Km et t_1 le temps en heures. $v_2 = \dfrac{d_2}{t_2} = 30$ K h^{-1} et $d_2 = 0{,}007 + 0{,}004\tan\theta$

On a donc $t_1 = \dfrac{\dfrac{0{,}004}{\cos\theta}}{60} = \dfrac{0{,}004}{30\cos\theta}$

et $t_2 = \dfrac{0{,}007 + 0{,}004\tan\theta}{60}$

2° On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta}$

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $t_1 < t_2$

$t_1 < t_2 \Leftrightarrow \dfrac{0{,}004}{30\cos\theta} < \dfrac{0{,}007 + 0{,}004\tan\theta}{60} \Leftrightarrow \dfrac{8}{\cos\theta} - (7 + 4\tan\theta) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{\cos\theta} - \dfrac{7}{2} - 2\tan\theta < 0 \Leftrightarrow f(\theta) > 0$

3° Conclure. ***Rappel* :**

La fonction $x \longmapsto \tan x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et a pour dérivée la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

$f'(\theta) = 4 \times \dfrac{-\sin\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{2}{\cos^2\theta} = \dfrac{2 - 4\sin\theta}{\cos^2\theta}$

f'(x) est du signe de $2 - 4\sin\theta$.

$2 - 4\sin\theta \geq 0 \Leftrightarrow \sin\theta \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\theta \leq \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta \leq \dfrac{\pi}{6}$ car la fonction sin est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$f(\theta) = \dfrac{7}{2} + \dfrac{2\sin\theta - 4}{\cos\theta}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(\theta) = -\infty$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
signe de f '		+	0	−	
f	$-\frac{1}{2}$	↗	$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$	↘	$-\infty$

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{7}{2} + \dfrac{2 \times \frac{1}{2} - 4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{7}{2} - 2\sqrt{3} \approx 0{,}036.$

le lapin a une chance !

La calculatrice donne les solutions approchées de l'équation $f(\theta) = 0$:

$\alpha \approx 0{,}39$ et $\beta \approx 0{,}64$

les variations de f donnent : $f(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta \in \,]\alpha, \beta[$

$\alpha \approx 22{,}6$ degré et $\beta \approx 36{,}9$ degrés.

Le lapin pour échapper au camion doit partir avec un angle compris entre 23° et 36° environ