Polynésie 2004 ex3 $\quad$ 1° $f_k(x) = x + \dfrac{1 - k\,e^x}{1 + k\,e^x}$

a) $(f_k(x) - x)^2 + 1 = \left(\dfrac{1 - k\,e^x}{1 + k\,e^x}\right)^2 + 1 = \dfrac{(1 - k\,e^x)^2 + (1 + k\,e^x)^2}{(1 + k\,e^x)^2} = \dfrac{1 - 2\,k\,e^x + k^2\,e^{2\,x} + 1 + 2\,k\,e^x + k^2\,e^{2\,x}}{(1 + k\,e^x)^2} = \dfrac{2 + 2\,k^2\,e^{2\,x}}{(1 + k\,e^x)^2}$

$f_k'(x) = 1 + \dfrac{-\,k\,e^x\,(1 + k\,e^x) - (1 - k\,e^x) \times k\,e^x}{(1 + k\,e^x)^2} = \dfrac{1 + 2\,k\,e^x + k^2\,e^{2\,x} - k\,e^x - k^2\,e^{2\,x} - k\,e^x + k^2\,e^2}{(1 + k\,e^x)^2} = \dfrac{1 + k^2\,e^{2\,x}}{(1 + k\,e^x)^2}$

On a bien : $2\,f_k'(x) = (f_k(x) - x)^2 + 1$ donc f_k est bien solution de l'équation : $2\,y' = (y - x)^2 + 1$.

2° pour tout réel x , $f_k'(x) > 0$donc f_k est croissante sur $\mathbb{R}$.

$f_k(0) = 0 \Leftrightarrow 0 + \dfrac{1 - k\,e^0}{1 + k\,e^0} = 0 \Leftrightarrow k = 1$. $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}$.

$f_k(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1 - k\,e}{1 + k\,e} = 1 \Leftrightarrow 1 - k\,e = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{e}$.

3° On ne le demande pas mais rien ne nous empêche de vérifier que $f_k(x) = x - 1 + \dfrac{2}{1 + k\,e^x} = x + 1 - \dfrac{2\,k\,e^x}{1 + k\,e^x}$.

$x - 1 + \dfrac{2}{1 + k\,e^x} = x + \dfrac{-\,(1 + k\,e^x) + 2}{1 + k\,e^x} = x + \dfrac{1 - k\,e^x}{1 + k\,e^x} = f_k(x)$

$x + 1 - \dfrac{2\,k\,e^x}{1 + k\,e^x} = x + \dfrac{1 + k\,e^x - 2\,k\,e^x}{1 + k\,e^x} = x + \dfrac{1 - k\,e^x}{1 + k\,e^x} = f_k(x)$

Pour tout réel x, $\dfrac{2}{1 + k\,e^x} > 0$ donc $f_k(x) \geq x - 1$ et donc $\mathscr{C}_k$ est au dessus de $\mathscr{D}'$

Pour tout réel x, $-\dfrac{2\,k\,e^x}{1 + k\,e^x} < 0$ donc $f_k(x) \leq x + 1$ et donc $\mathscr{C}_k$ est au dessous de $\mathscr{D}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2\,k\,e^x}{1 + k\,e^x} = \dfrac{2 \times 0}{1 + k \times 0} = 0$. la droite $\mathscr{D}$ est donc asymptote à $\mathscr{C}_k$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{1 + k\,e^x} = 0$. la droite $\mathscr{D}'$ est donc asymptote à $\mathscr{C}_k$ en ∞.

4° a) $f_1(x) = x + \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$ $\qquad f_1(-\,x) = -\,x + \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -\,x + \dfrac{e^x\,(1 - e^{-x})}{e^x\,(1 + e^{-x})} = -\,x + \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = -\left(x + \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}\right) = -\,f_1(x)$

la fonction f_1 est impaire.

b) Si $x > 0$

f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$ donc : $x > 0 \Rightarrow f_1(x) > f_1(0) \Rightarrow f_1(x) > 0$.

$\int_0^x f_1(t)\,dt$ représente, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_1$ l'axe des abscisses et les droites d'équation "Y = 0" et "X = x".

Si $x < 0$

f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$ donc : $x < 0 \Rightarrow f_1(x) < f_1(0) \Rightarrow f_1(x) < 0 \Rightarrow -\,f_1(x) > 0$.

$\int_x^0 -\,f_1(t)\,dt$ représente, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_1$ l'axe des abscisses et les droites d'équation "Y = 0" et "X = x".

$\int_0^x f_1(t)\,dt = -\int_x^0 f_1(t)\,dt = \int_x^0 -\,f_1(t)\,dt$ représente, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_1$ l'axe des abscisses et les droites d'équation "Y = 0" et "X = x".

La fonction f_1 est impaire donc la partie du plan limitées par $\mathscr{C}_1$, (OX) et les droites "X = x" et "X = 0" a la même aire que celle limitée par $\mathscr{C}_1$, (OX) et les droites "X = – x" et "X = 0"

Donc pour tout réel x, $F(x) = F(-\,x)$. la fonction F est paire.

c)

x	$-\infty$				$+\infty$
signe de F		$-$	0	$+$	
F		↘		↗	

d) $f_1(t) = t + 1 - \dfrac{2\,e^t}{1 + e^t}$

On pose : $u(t) = 1 + e^t$ et donc $u'(t) = e^t$.

On a $-\dfrac{2\,e^t}{1 + e^t} = -\,2\,\dfrac{u'(t)}{u(t)}$

La fonction $t \longmapsto -\dfrac{2\,e^t}{1 + e^t}$ admet comme primitive la fonction : $t \longmapsto -\,2\ln(|u(t)|)$

$F(x) = \left[\dfrac{t^2}{2} + t - 2\ln(1 + e^t)\right]_0^x = \dfrac{x^2}{2} + x - 2\ln(1 + e^x) - (-\,2\ln(1 + 1)) = \dfrac{x^2}{2} + x - 2\ln(1 + e^x) + 2\ln 2$.