

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

1° Etudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?

2° Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^x$.

3° a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

4° On considère les fonctions g et h définies sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{e^x}$ et $h(x) = \frac{1}{2e^x}$.

Sur l'annexe sont tracées, dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les courbes représentatives de g et h , notées respectivement Γ_1 et Γ_2 .

a) Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

b) Que peut-on en déduire pour les courbes Γ , Γ_1 , et Γ_2 ?

Tracer Γ sur l'annexe, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

1° Justifier l'existence de (I_n) , et donner une interprétation géométrique de (I_n) .

2° a) Démontrer, que pour tout entier naturel n , $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$.

b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

c) Démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $J_n = \int_0^n f(x) dx$.

1° En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A. 4° a), démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n}$$

2° Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

En déduire qu'elle converge.

3° On note L la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant : « Si U_n , V_n et W_n sont trois suites convergentes de limites respectives a , b et c et si, à partir d'un certain rang on a pour tout n , $U_n \leq V_n \leq W_n$, alors $a \leq b \leq c$ »

Donner un encadrement de L .

4° Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

On note v la primitive de u sur \mathbb{R} telle que $v(1) = \frac{\pi}{4}$.

On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{\pi}{2}$.

a) Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}$.

b) Démontrer que, pour tout réel x , f est la dérivée de la fonction $x \mapsto v(e^x)$

c) En déduire la valeur exacte de L .

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. 1° Etudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?

$$f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x). \text{ } f \text{ est paire donc sa représentation graphique est symétrie par rapport à } (Oy)$$

2° Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^x$.

$$e^{-x} \leq e^x \Leftrightarrow -x \leq x \Leftrightarrow 0 \leq 2x \Leftrightarrow x \geq 0.$$

3° a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + e^{-x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

b) Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

On a vu que pour tout réel x positif $e^{-x} \leq e^x$ donc $f'(x) \geq 0$.

f est donc croissante sur $]0, +\infty[$

4° On considère les fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{e^x}$ et $h(x) = \frac{1}{2e^x}$. Sur l'annexe sont tracées, dans le repère

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ les courbes représentatives de g et h , notées respectivement Γ_1 et Γ_2 .

a) Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

pour tout réel x positif ou nul on a :

$$0 \leq e^{-x} \leq e^x \text{ donc } 0 < e^x \leq e^x + e^{-x} \leq e^x + e^x \text{ donc}$$

$$\frac{1}{e^x} \geq \frac{1}{e^x + e^{-x}} \geq \frac{1}{2e^x} \text{ (la fonction inverse est décroissante}$$

sur \mathbb{R}_+^*)

donc $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

b) Que peut-on en déduire pour les courbes Γ , Γ_1 , et Γ_2 ? Tracer Γ sur l'annexe, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Γ est donc entre Γ_1 et Γ_2

$$f'(0) = \frac{e^0 - e^0}{(e^0 + e^0)^2} = 0. \text{ la tangente est donc horizontale.}$$

Partie B Soit (I_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

1° Justifier l'existence de (I_n) , et donner une interprétation géométrique de (I_n) .

La fonction f est continue sur l'intervalle $[n; n+1]$

donc f est intégrable sur cet intervalle.

I_n représente l'aire en unité d'aire de la partie plan limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = n$ et $x = n+1$.

2° a) Démontrer, que pour tout entier naturel n , $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$.

Soit n un entier naturel. f est décroissante sur $[n; n+1]$ donc pour tout réel x de $[n; n+1]$: $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

On intègre les inégalités sur l'intervalle $[n; n+1]$

$$\int_n^{n+1} f(n) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n+1) dx$$

$$\text{donc } f(n)(n+1-n) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq (n+1-n)f(n+1) \text{ (inégalité de la moyenne.}$$

On a bien : $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$.

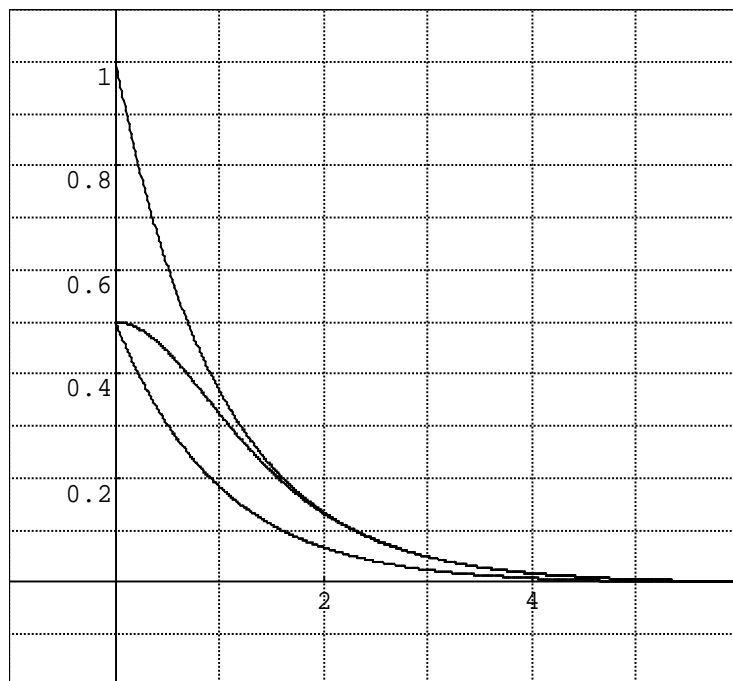
b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

$$\text{On a : } f(n+2) \leq I_{n+1} \leq f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$$

c) Démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

$$\text{On sait } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0$$

D'après le théorème des gendarmes on peut dire que la suite (I_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.



Partie C Soit (J_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $J_n = \int_0^n f(x) dx$. 1° En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A. 4° a), démontrer que, pour tout entier naturel n : $\frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n}$

Pour tout réel x de $[0 ; n)$, $\frac{1}{e^x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2e^x}$.

On intègre les inégalités sur l'intervalle $[0 ; n]$

$$\int_0^n \frac{1}{2e^x} dx \leq \int_0^n f(x) dx \leq \int_0^n \frac{1}{e^x} dx \text{ c'est à dire } \frac{1}{2} \int_0^n \frac{1}{e^x} dx \leq \int_0^n f(x) dx \leq \int_0^n \frac{1}{e^x} dx$$

$$\text{On a : } \int_0^n \frac{1}{e^x} dx = \int_0^n e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^n = -e^{-n} + e^0$$

$$\text{On a donc : } \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \leq J_n \leq 1 - e^{-n}$$

2° Démontrer que la suite (J_n) est croissante. En déduire qu'elle converge.

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{n+1} f(x) dx - \int_0^n f(x) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx = I_n$$

La fonction f est positive sur l'intervalle $[n ; n+1)$ donc $\int_n^{n+1} f(x) dx \geq 0$ donc $J_{n+1} - J_n \geq 0$. la suite (J_n) est donc croissante.

Pour tout entier naturel n , $J_n \leq 1 - e^{-n} \leq 1$. la suite (J_n) est donc croissante et majorée donc convergente.

3° On note L la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant : « Si U_n, V_n et W_n sont trois suites convergentes de limites respectives a, b et c et si, à partir d'un certain rang on a pour tout n , $U_n \leq V_n \leq W_n$, alors $a : a \leq b \leq c$ Donner un encadrement de L .

Les suites : $(\frac{1}{2}(1 - e^{-n}))$, (J_n) et $(1 - e^{-n})$ sont convergentes. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-n}) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2}$

$$\text{On a donc : } \frac{1}{2} \leq L \leq 1$$

4° Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On note v la primitive de u sur \mathbb{R} telle que $v(1) = \frac{\pi}{4}$. On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{\pi}{2}$. a) Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}$.

$$\frac{e^x}{(e^x)^2 + 1} = \frac{e^x \times e^{-x}}{(e^x)^2 \times e^{-x} + e^{-x}} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = f(x)$$

b) Démontrer que, pour tout réel x , f est la dérivée de la fonction $x \mapsto v(e^x)$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = v(e^x)$

F est la composée de deux fonction dérivable sur \mathbb{R} elle est donc dérivable sur \mathbb{R} .

$$F'(x) = v'(e^x) \times e^x = \frac{1}{(e^x)^2 + 1} \times e^x = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1} = f(x)$$

c) En déduire la valeur exacte de L .

$$\int_0^n f(x) dx = [v(e^x)]_0^n = v(e^n) - v(e^0) = v(e^n) - \frac{\pi}{4}$$

la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \frac{\pi}{2}$

On pose $N = e^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v(e^n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} v(N) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$