juin 2005 La Réunion Exercice 5 (3 points)

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, par $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = e^x - 1$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat,

1° Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point O(0 ; 0). Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.

2° Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

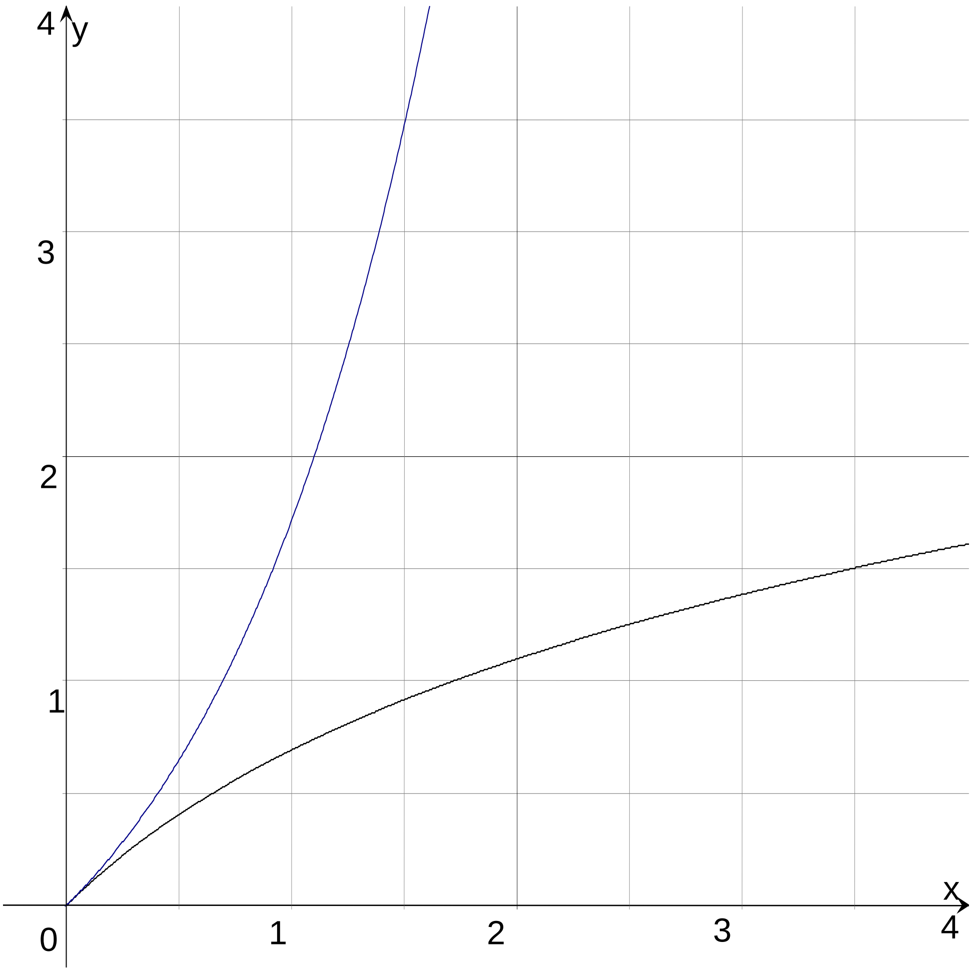
3° Soit a un nombre réel strictement positif.

On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $I(a) = \int_0^a \ln(x+1)\,dx$.

a) En utilisant des considérations d'aires, démontrer que $I(a) = a\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1)\,dx$.

b) En déduire la valeur de I (a).

c) Retrouver la valeur de I (a) en effectuant une intégration par parties.



On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle [0 ; + ∞ [, par f (x) = ln(x +1) et g(x) = e^x – 1. On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$). Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat, 1° Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point O(0 ; 0). Préciser la position de la courbe C_f par rapport à cette tangente.

$f(x) = \ln(x+1)$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $g(x) = e^x - 1$ et $g'(x) = e^x$

$f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$ $\qquad$ $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$

$f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$ donc $\mathscr{C}_f$ $\mathscr{C}_g$ ont la même tangente en O.

2° Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

M(x,y) et M'(y,x) sont symétrique par rapport à la droite Δ d'équation "y = x ".

$M(x, y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = \ln(x+1)$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow e^y = x + 1$ et $x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x = e^y - 1$ et $e^y \geq 1 \Leftrightarrow x = e^y - 1$ et $y \geq 0$

$\Leftrightarrow M(y,x) \in \mathscr{C}_g$ $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont donc symétrique par rapport à la droite Δ d'équation "y = x"

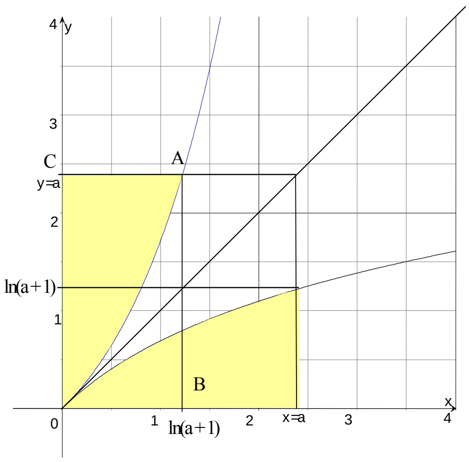
3° Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre I(a) = $\int_0^a \ln(x+1)\,dx$. a) En utilisant des considérations d'aires, démontrer que I(a) = a ln (a + 1) – $\int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1)\,dx$.

I(a) est égal, en unité d'aire, à l'aire de la partie du plan limité par l'axe des abscisse, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation x = 0 et x = a. par symétrie autour de Δ

Cette aire est égale à l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des ordonnées (symétrique de l'axe des abscisses) la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation y = 0 et y = a

I(a) = aire (ABCD) – $\mathscr{A}$ avec $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_g$ l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = ln (a + 1)

$I(a) = \ln(a+1) \times a - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1)\,dx$



b) En déduire la valeur de I (a).

$I(a) = a\ln(a+1) - [e^x - x]_0^{\ln(a+1)} = a\ln(a+1) - (e^{\ln(a+1)} - \ln(a+1) - (e^0 - 0))$

$= a\ln(a+1) - e^{\ln(a+1)} + \ln(a+1) + 1 = (a+1)\ln(a+1) - a - 1 + 1 = (a+1)\ln(a+1) - a.$

c) Retrouver la valeur de I (a) en effectuant une intégration par parties.

$I(a) = \int_0^a \ln(x+1)\,dx$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = \ln(x+1) \text{ et } u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v'(x) = 1 \text{ et } v(x) = x + 1 \end{array}\right\} \text{donc } I(a) = [(x+1)\ln(x+1)]_0^a - \int_0^a \frac{x+1}{x+1}\,dx$$

$= (a+1)\ln(a+1) - (0+1)\ln(0+1) - [x]_0^a = (a+1)\ln(a+1) - a + 0 = (a+1)\ln(a+1) - a.$