1 1° En appliquant l'inégalité de la moyenne, montrer que, pour tout réel x positif : $-x \leq \sin x \leq x$.

2° En déduire, par intégrations successives que, pour tout réel x positif : $-0{,}5\,x^2 \leq 1 - \cos x \leq 0{,}5\,x^2$, puis que : $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$:

2 Montrer que, pour tout réel x positif : $1 + x \leq e^x$, puis que $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 \leq e^x$.

3 Déterminer la valeur moyenne de : a) $f\ x \longmapsto \sin x$ sur l'intervalle $[\,0\ ;\pi]$ puis sur l'intervalle $[0\ ;2\,\pi\,]$;

b) $f : x \longmapsto \cos^2 x$ sur l'intervalle $\left[0\ ,\dfrac{\pi}{2}\right]$, puis sur l'intervalle $[0\ ;\pi]$

4 Soit $i\,(t) = 5\sin\left(100\pi\,t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ une intensité de courant variable en fonction du temps t

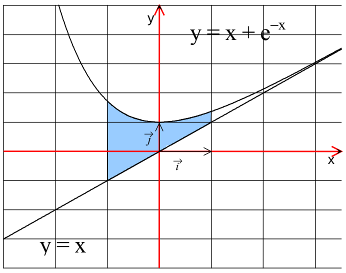
1°) Déterminer la période T de cette fonction. 2°) Calculer la valeur moyenne de i sur une période T

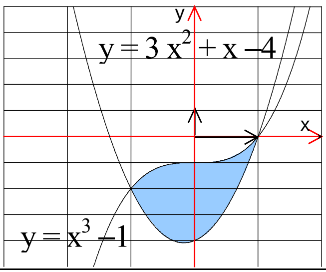
5 Suite à un début de maladie infectieuse dans une région, on a constaté que le nombre de personnes ayant contracté la maladie t jours après l'apparition des premiers cas est donné par : $f(t) = 45\,t^2 - t^3$ pour $t \in [0\ ;25]$
Calculer le nombre moyen de personnes malades durant les huit premiers jours.

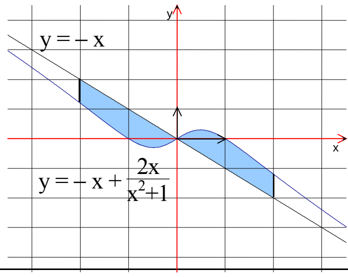
6 La capacité pulmonaire, exprimée en litre, de l'être humain suivant son âge x, de 10 à 90 ans, a été modélisée par la fonction f telle que: $f(x) = \dfrac{110(\ln x - 2)}{x}$.

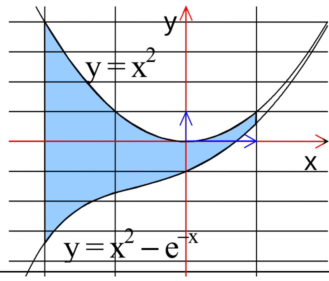
1° Etudier les variations de la fonction f sur [10 ; 90] . (On montrera que f est décroissante : sur $[e^3\ ;90]$.
2° a) Tracer la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ d'unités graphiques : 2 cm pour 10 ans et 3 cm pour 1 litre. b) Déterminer graphiquement l'intervalle de temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure ou égale à 5 litres. 3° a) Calculer la dérivée de g définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $g(x) = (\ln x)^2$. b) Déterminer la valeur moyenne de la capacité pulmonaire de 20 à 70 ans, à 0,1 litre près par défaut.

7 Calculer l'aire, en unité d'aire, de chacun des domaines suivants.









8 Soit la fonction définie sur $[\,0\ ;+\infty\,[$ par : $f(x) = x^2\,(1 - e^{-x})$.
1°) Soit h la fonction définie sur $[\,0\ ;+\infty\,[$ par : $h(x) = x^2 - f(x)$.
a) Calculer h(0) et déterminer la limite de h(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
b) Etudier le sens de variation de h.
c)Dresser le tableau des variations de h.
2° On désigne par $\mathscr{P}$ la courbe représentative de la fonction qui à x associe x^2 et par $\mathscr{C}$ celle de f, dans un repère orthogonal $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ (unités 4 cm sur (Ox) , 1 cm sur (Oy)). Soit α un nombre réel strictement positif.
a) Déterminer des réels a, b et c pour que la fonction $\mathscr{H}$, définie sur $[\,0\ ;+\infty\,[$ par $\mathscr{H}(x) = (a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{-x}$ soit une primitive de la fonction h.
b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\alpha} h\,(x)\,dx$.
c) Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ du domaine limité par les courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = \alpha$.
d) Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$:

9 Soit la branche d'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ avec $x > 0$.

1° Montrer que l'aire A du domaine limité par la courbe H, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = 2a , avec a > 0, est indépendante de a.
2° Soit A et *B* les points de la courbe d'abscisses respectives 1 et 2. a) Déterminer les équations réduites des tangentes T et T' à H, aux points A et B. b) Soit C le point d'intersection des droites T et T'. Déterminer les coordonnées de C.
3° On appelle A' , B' et C' les projections orthogonales des points A , B et C sur l'axe des abscisses.
a) Calculer l'aire du trapèze AA'B'B . puis la somme des aires des trapèzes A'C'CA et CC'B'B.

b) En déduire un encadrement de l'aire A, puis un encadrement de ln 2.

$\boxed{1}$ $\forall\, t \in [0\,,\,x],\ -1 \leq \sin t \leq 1$. Inégalité de la moyenne : $(x-0)\times(-1) \leq \int_0^x \sin t\,dt \leq (x \times 0) \times 1$

c'est à dire $-x \leq \sin x \leq x$.

2° $\forall\, t \in [0\,,\,x],\ -t \leq \sin t \leq t$. on intègre les inégalités sur $[0\,,\,x]$. $\int_0^x -t\,dt \leq \int_0^x \sin t\,dt \leq \int_0^x t\,dt$

$\Leftrightarrow \left[-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq [-\cos t\,]_0^x \leq \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} \leq -\cos x + \cos 0 \leq \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} \leq 1-\cos x \leq \frac{x^2}{2}$

3° $\forall\, t \in [0\,,\,x],\ -\frac{t^2}{2} \leq 1-\cos t \leq \frac{t^2}{2}$. On intègre les inégalités sur $[0\,,\,x]$.

$\int_0^x -\frac{t^2}{2}\,dt \leq \int_0^x (1-\cos t)\,dt \leq \int_0^x \frac{t^2}{2}\,dt \Leftrightarrow \left[-\frac{t^3}{6}\right]_0^x \leq [t-\ \sin t]_0^x \leq \left[\frac{t^3}{6}\right]_0^x \Leftrightarrow -\frac{x^3}{6} \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$

$\Leftrightarrow -\frac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq \frac{x^3}{6} \Leftrightarrow x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x + \frac{x^3}{6}$

$\boxed{2}$ $\forall\, t \geq 0,\ e^t \leq e^0$ On intègre les inégalité sur $[0\,,\,x]$: $\int_0^x e^t\,dt \leq \int_0^x dt$ donc $[e^t\,]_0^x \leq x$ donc $e^x - 1 \leq x$ donc $1 + x \leq e^x$

$\forall\, t \geq 0,\ 1 + t \leq e^t$ On intègre les inégalité sur $[0\,,\,x]$:

$\int_0^x (1+t)\,dt \leq \int_0^x e^t\,dt$ donc $\left[t+\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq [e^t\,]_0^x$ donc $x + \frac{x^2}{2} \leq e^x - 1 \leq$ donc $1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$.

$\boxed{3}$ a) $\frac{\int_0^\pi \sin x\,dx}{\pi - 0} = \frac{[-\cos x]_0^\pi}{\pi} = \frac{-\cos \pi + 1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$ et $\frac{\int_0^{2\pi} \sin x\,dx}{2\pi - 0} = \frac{[-\cos x]_0^{2\pi}}{2\pi} = \frac{-\cos(2\pi)+1}{2\pi} = 0$.

b) $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ $\quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x + 1}{2}\,dx = \left[\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin \pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ donc $\mu = \frac{\pi/4}{\pi/2 - 0} = 2\pi$

$\boxed{4}$ 1° $100\,\pi\,T = 2\,\pi \Leftrightarrow T = \frac{1}{50} = 0{,}02$

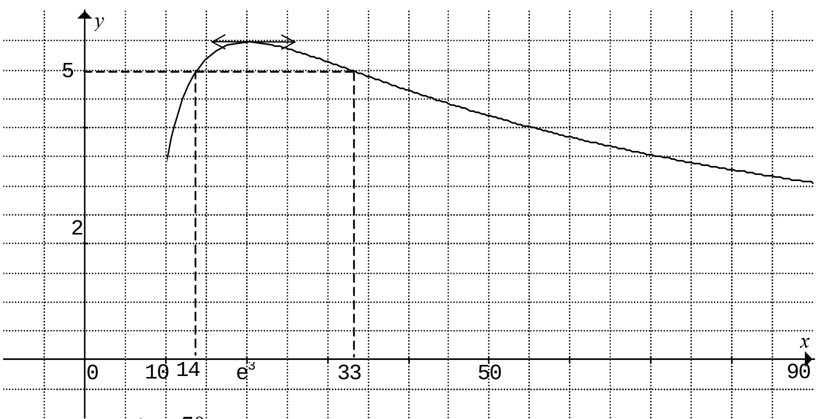
b) $\mu = \frac{1}{a + 0{,}02 - a} \times \int_a^{a+0{,}02} 5 \sin\left(100\pi\, t + \frac{\pi}{3}\right) dt = 50 \times 5 \times \frac{\left[-\cos\left(100\pi\, t + \frac{\pi}{3}\right)\right]_a^{a+0{,}02}}{100}$

$= \frac{250}{100}\left(-\cos\left(100\,a + 2\,\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(100\,a + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 0$

$\boxed{5}$ $\mu = \frac{\int_0^8 (45\,t^2 - t^3)\,dt}{8-0} = \frac{1}{8}\left[45\,\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_0^8 = \frac{1}{8}\left(9 \times 8^3 - \frac{8^4}{4}\right) = 832$.

$\boxed{6}$ 1° $f(x) = 110 \times \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x - 2)}{x^2} = 110 \times \frac{3 - \ln x}{x^2}$. $f'(x) \geq \Leftrightarrow 3 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 3 \geq \ln x \Leftrightarrow e^3 \geq x$

x	10		e^3		90
signe de f '		+	0	–	
f		$\nearrow$		$\searrow$	



$e^3 \approx 20{,}1$

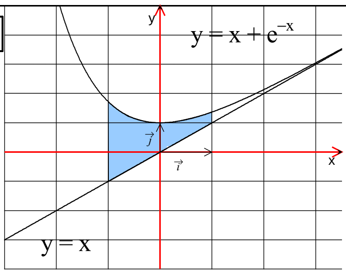
$f(e^3) \approx 5{,}48$ $\quad f(10) \approx 3{,}33$ et $f(90) \approx 3{,}1$

2° $14 \leq x \leq 33$

3° a) $g'(x) = 2 \times \ln x \times \frac{1}{x} = 2\,\frac{\ln x}{x}$

b) $\mu = \frac{\int_{20}^{70} f(x)\,dx}{70 - 2} = \frac{110}{50}\int_{20}^{70}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{11}{5}\left[\frac{(\mathrm{lx}\ x)^2}{2} - \ln x\right]_{20}^{70} \approx 4{,}4$

$\boxed{7}$

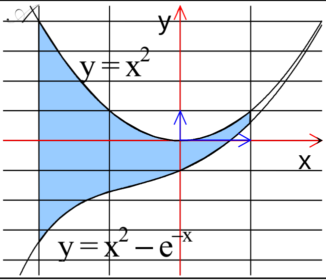


En unité d'aire on a :

$\mathscr{A} = \int_{-1}^{1} (x + e^{-x} - x)\,dx$

car $\forall\, x \in [-1\,,\,1],\ x + e^{-x} \geq x$

$\mathscr{A} = \left[- e^{-x} \right]_{-1}^{1} = -\dfrac{1}{e} + e$

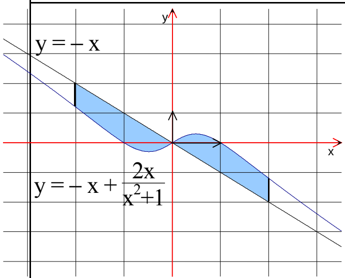


En unité d'aire on a :

$\mathscr{A} = \int_{-2}^{1} x^2 - (x^2 - e^{2x})\,dx$

car $\forall\, x \in [-2\,,\,1],\ x^2 - e^{2x} \leq x^2$

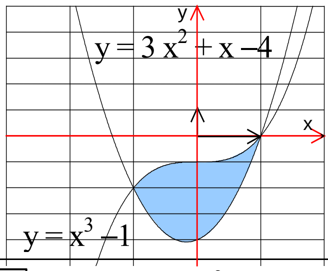
$\mathscr{A} = \int_{-2}^{1} e^{2\,x}\,dx = \left[\dfrac{e^{2\,x}}{2}\right]_{-2}^{1} = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{2\,e^4}$



En unité d'aire on a :

$\mathscr{A} = \int_{-2}^{0} \left(-x - (-x + \dfrac{2\,x}{x^2+1})\right) dx + \int_{0}^{2} \left(-x + \dfrac{2\,x}{x^2+1} - (-x)\right) dx$

$= 2 \times \int_{0}^{2} \left(-x + \dfrac{2\,x}{x^2+1} - (-x)\right) dx = 2 \times \int_{0}^{2} \dfrac{2\,x}{x^2+1}\,dx = 2 \times [\ln (x^2+1)]_0^2 = 2 \ln 5$



En unité d'aire on a :

$\mathscr{A} = \int_{-1}^{1} (x^3 - 1 - (3\,x^2 + x - 4))\,dx = \left[\dfrac{x^4}{4} - x - 3 \times \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 4\,x\right]_{-1}^{1}$

$= \dfrac{1}{4} - 1 - 1 - \dfrac{1}{2} + 4\ \ - \dfrac{1}{4} - 1 - 1 + \dfrac{1}{2} + 4 = 4$

$\boxed{8}$ 1° a) $h(x) = x^2\,e^{-x}$ $h(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$

b) $h\,'(x) = (2\,x - x^2)\,e^{-x} = x\,(2 - x)\,e^{-x}$

c)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de h '		–	0	+	0	–	
h		↘	0	↗		↘	0

2° a) $\mathscr{H}(x) = (a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{-x}$

$\mathscr{H}\,'(x) = (2\,a\,x + b)\,e^{-x} - (a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{-x}$

$(2\,a\,x + b)\,e^{-x} - (a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{-x} = x^2\,e^{-x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ 2\,a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$ $\quad \mathscr{H}(x) = (-x^2 - 2\,x - 2)\,e^{-x}$

b) $\int_0^{\alpha} h\,(x)\,dx = [(-x^2 - 2\,x - 2)\,e^{-x}]_0^{\alpha} = -\dfrac{\alpha^2 + 2\,\alpha + 2}{e^{\alpha}} + \dfrac{1 + 2 + 2}{e} = -(\alpha^2 + 2\,\alpha + 2)\,e^{-\alpha} + 5\,e^{-1}$

$\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} h\,(x)\,dx = \dfrac{5}{e}$

d) Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$: